



## CORSO DI DINAMICA DELLE STRUTTURE

DOCENTE: PROF. ING. FEDERICO PEROTTI

# Analisi Dinamica di un Telaio Multipiano

*A cura di*

***Prof. Maria Gabriella Mulas  
Ing. Mariagrazia Di Pilato***

## 1 IL SISTEMA STRUTTURALE IN STUDIO

Il sistema in studio, mostrato in Fig. 1, è costituito da un telaio multipiano in acciaio, a nodi saldati, facente parte di un edificio per uffici.

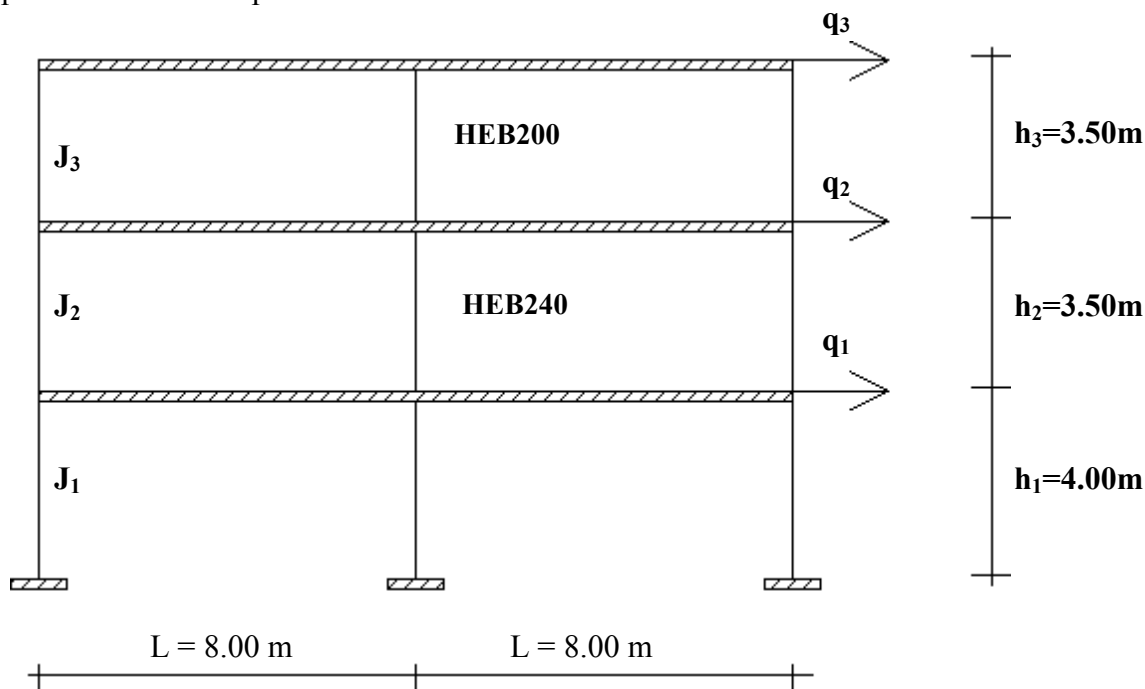


Fig. 1 – Il telaio in studio.

Esso verrà analizzato nell'ipotesi semplificativa che la rigidità flessionale delle travi sia così maggiore di quella delle colonne da consentire di poter essere considerata come infinita. Si può osservare che tale ipotesi è più restrittiva di quella di travi assialmente indeformabili (e quindi di infinita rigidità assiale) che solitamente si adotta nel caso di impalcati costituiti da solette in cemento armato. Le moderne normative per le costruzioni in zona sismica richiedono usualmente che i telai siano progettati, attraverso il criterio della gerarchia delle resistenze, in maniera tale che siano le zone di estremità delle travi a dissipare, attraverso le deformazioni plastiche, l'energia immessa dalla struttura nel terremoto. In tal caso le colonne risultano essere dimensionate in maniera tale che la loro resistenza (e quindi anche la loro rigidità) sia maggiore di quella delle travi adiacenti. L'ipotesi adottata presenta però il vantaggio, dal punto di vista dell'analisi, di consentire una drastica riduzione nel numero di gradi di libertà necessari a descrivere il moto della struttura: la traslazione orizzontale di ciascun piano identifica completamente la configurazione deformata della struttura, che per tale motivo viene chiamata *shear-type*. Le coordinate libere adottate sono pertanto le traslazioni orizzontali  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_3$  rispettivamente del primo, secondo e terzo piano; a queste coordinate verrà associata tutta la massa di piano. L'analisi così svolta consente, in prima approssimazione, la determinazione delle caratteristiche dinamiche della struttura e del suo comportamento per effetto di diversi tipi di sollecitazione.

## 2 CARATTERISTICHE DELL'IMPALCATO

Per meglio inquadrare l'analisi del telaio occorre fare riferimento all'edificio nella sua interezza. In figura 2 è riportata la pianta dell'impalcato; nell'analisi si supporrà che l'edificio abbia una ossatura portante costituita da una serie di telai piani spazati ad intervallo regolare (4.00 m) e che il telaio in studio sia uno dei telai centrali, in maniera tale da poter considerare un'area di influenza pari all'interasse dei telai. Verrà analizzato solo il comportamento dinamico nel piano del telaio stesso, ipotizzando che l'edificio sia provvisto di un adeguato sistema di controvento nel piano ortogonale.

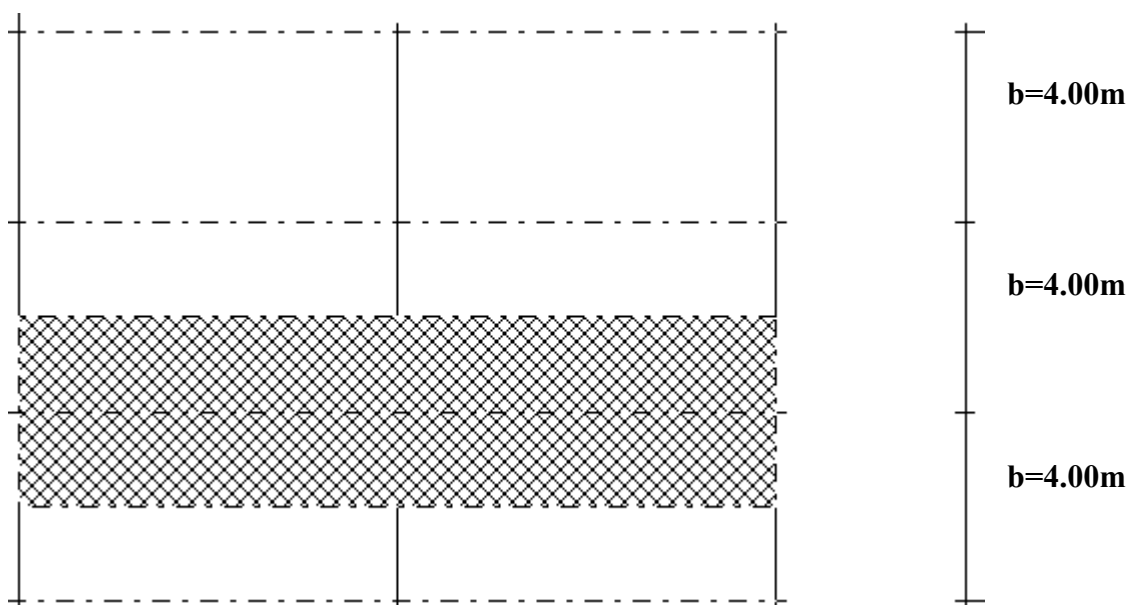


Fig. 2 – Pianta dell'impalcato.

Ai fini dell'analisi dinamica i dati di interesse sono le masse distribuite (per unità di superficie) e il modulo elastico:

- Massa impalcato (permanente + porzione accidentale) 1<sup>o</sup> e 2<sup>o</sup> piano:  $1000 \text{ Kg/m}^2$
- Massa impalcato (permanente + porzione accidentale) 3<sup>o</sup> piano:  $750 \text{ Kg/m}^2$
- Modulo elastico E:  $205 \text{ GPa}$

Le caratteristiche geometriche dei pilastri, facilmente reperibili nei profilari, sono:

<b>HEB 280</b>	<b>h=280 mm ;</b>	<b>A=131 cm<sup>2</sup> ;</b>	<b>J<sub>1</sub> = J<sub>x</sub> =19270 cm<sup>4</sup></b>
<b>HEB 240</b>	<b>h=240 mm ;</b>	<b>A=106 cm<sup>2</sup> ;</b>	<b>J<sub>2</sub> = J<sub>x</sub> =11260 cm<sup>4</sup></b>
<b>HEB 200</b>	<b>h=200 mm ;</b>	<b>A=78.1 cm<sup>2</sup> ;</b>	<b>J<sub>3</sub> = J<sub>x</sub> = 5696 cm<sup>4</sup></b>

### 3 CARATTERISTICHE DINAMICHE DELLA STRUTTURA

Le masse concentrate relative ai gradi di libertà  $q_1, q_2, q_3$  si valutano moltiplicando la massa distribuita dell'impalcato per l'area di influenza del telaio in studio:

$$\begin{aligned} m_1 &= 1000(Kg/m^2) \cdot 16(m) \cdot 4(m) = 64000(Kg) & m_1 &= 64 t ; \\ m_2 &= 1000(Kg/m^2) \cdot 16(m) \cdot 4(m) = 64000(Kg) = m_1 & m_2 &= 64 t ; \\ m_3 &= 750(Kg/m^2) \cdot 16(m) \cdot 4(m) = 48000(Kg) = 0.75 m_1 & m_3 &= 48 t ; \end{aligned}$$

Le costanti elastiche  $K_i$  relative ai piani del telaio rappresentano le forze di taglio all' $i$ -esimo piano necessarie per produrre uno spostamento relativo unitario tra le due estremità del piano stesso; esse vengono valutate nel modo seguente:

$$\begin{aligned} k_1 &= 3 \cdot \frac{12 \cdot EJ_1}{h_1^3} = 36 \cdot \frac{205 \cdot 10^6 (kN/m^2) \cdot 19270 \cdot 10^{-8} (m^4)}{(4.00(m))^3} = 22220.7 kN/m \\ k_2 &= 3 \cdot \frac{12 \cdot EJ_2}{h_2^3} = 36 \cdot \frac{205 \cdot 10^6 (kN/m^2) \cdot 11260 \cdot 10^{-8} (m^4)}{(3.50(m))^3} = 19381.6 kN/m \\ k_3 &= 3 \cdot \frac{12 \cdot EJ_3}{h_3^3} = 36 \cdot \frac{205 \cdot 10^6 (kN/m^2) \cdot 5696 \cdot 10^{-8} (m^4)}{(3.50(m))^3} = 9804.4 kN/m \end{aligned}$$

Nel calcolo manuale dei modi principali della struttura risulta conveniente esprimere le costanti elastiche al 2° e 3° piano in funzione di quella del 1° piano; allo scopo si calcolano i seguenti coefficienti:

$$\frac{J_2}{J_1} = \frac{11260(cm^4)}{19270(cm^4)} = 0.58433 \qquad \frac{J_3}{J_1} = \frac{5696(cm^4)}{19270(cm^4)} = 0.29559$$

$$\frac{h_1^3}{h_2^3} = \frac{h_1^3}{h_3^3} = \frac{(4.00(m))^3}{(3.50(m))^3} = 1.49271$$

Segue:

$$\begin{aligned} k_2 &= 3 \cdot \frac{12 \cdot EJ_2}{h_2^3} = \frac{J_2}{J_1} \cdot \frac{h_1^3}{h_2^3} \cdot \left( 3 \cdot \frac{12 \cdot EJ_1}{h_1^3} \right) = 0.58433 \cdot 1.49271 \cdot k_1 = 0.87223 k_1 \\ k_3 &= 3 \cdot \frac{12 \cdot EJ_3}{h_3^3} = \frac{J_3}{J_1} \cdot \frac{h_1^3}{h_3^3} \cdot \left( 3 \cdot \frac{12 \cdot EJ_1}{h_1^3} \right) = 0.29559 \cdot 1.49271 \cdot k_1 = 0.44123 k_1 \end{aligned}$$

### 3.1 DETERMINAZIONE DELLA MATRICE DI RIGIDEZZA

La matrice di rigidezza  $\mathbf{k}$ , matrice dei coefficienti della forma quadratica che esprime l'energia elastica immagazzinata nella struttura, viene calcolata facendo riferimento al teorema di Clapeyron; quest'ultimo consente di esprimere il lavoro di deformazione come lavoro compiuto dalle forze esterne agenti sul sistema per i corrispondenti spostamenti. Nel nostro caso gli spostamenti sono quelli individuati dalle coordinate libere; in forma simbolica può essere scritto:

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1,3} Q_i q_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1,3} \left( \sum_{j=1,3} k_{ij} q_j \right) q_i = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{k} \mathbf{q}$$

Le forze  $Q_i$  sono le forze che, applicate in corrispondenza dei punti in cui sono definite le coordinate libere, e nella medesima direzione, sono in grado di mantenere il sistema in equilibrio nella configurazione deformata caratterizzata dai generici valori  $q_1, q_2, q_3$ . Facendo uso del principio di sovrapposizione degli effetti, ciascuna  $Q_i$  può essere vista come somma dei valori  $k_{ij}$  - determinati nelle particolari configurazioni in cui una sola delle coordinate libere del sistema è pari all'unità, mentre le restanti sono nulle - moltiplicati ordinatamente per il valore della corrispondente coordinata libera  $q_j$ . Queste particolari configurazioni deformate possono essere ottenute aggiungendo al sistema dei vincoli che impediscono il movimento individuato dalle coordinate libere, ed imponendo a ciascuno di essi un cedimento unitario, come mostrato in Fig. 3. Le reazioni dei vincoli aggiuntivi forniscono i coefficienti  $k_{ij}$  della matrice di rigidezza.

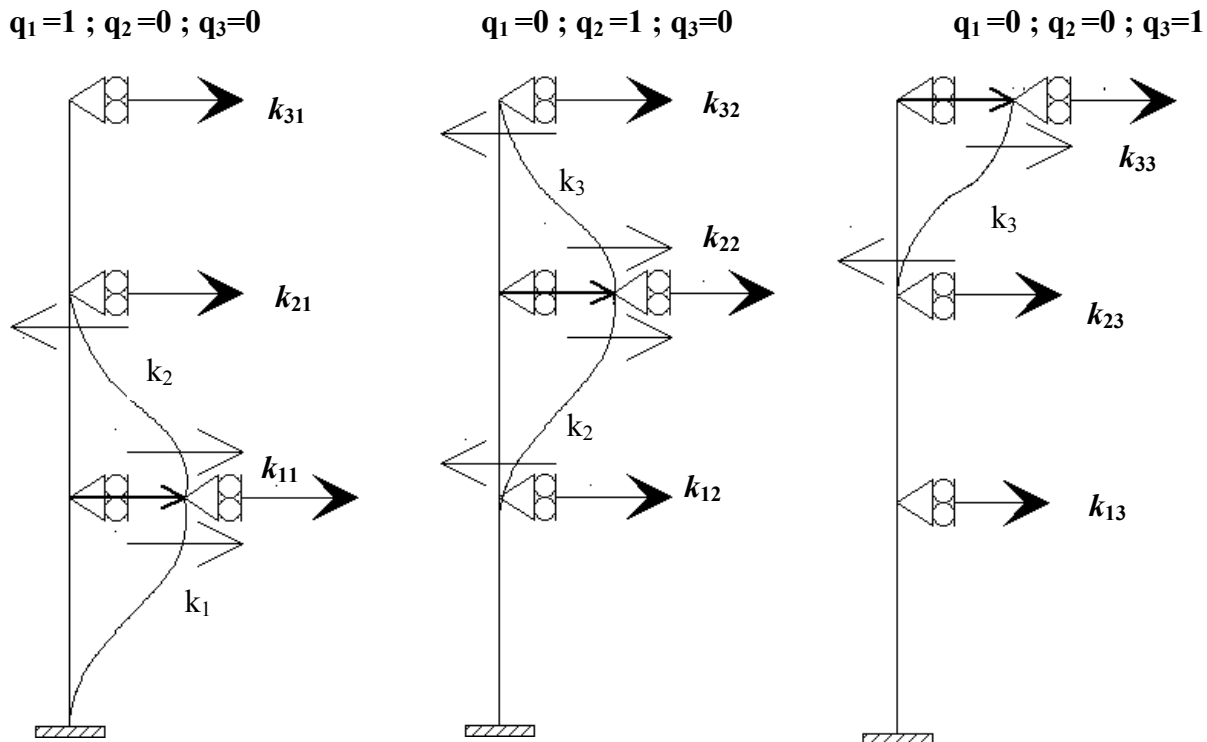


Fig. 3 – Configurazioni deformate e calcolo della matrice di rigidezza.

In Fig. 3 sono indicate le forze di taglio agenti sulle aste nelle configurazioni deformate in studio e le reazioni dei vincoli aggiuntivi. Le reazioni vincolari, pari alla somma delle forze che agiscono sulle estremità delle aste che convergono nel punto vincolato, sono facilmente determinabili:

$$\begin{array}{lll}
 k_{11} = k_1 + k_2 & k_{12} = -k_2 & k_{13} = 0 \\
 k_{21} = -k_2 & k_{22} = k_2 + k_3 & k_{23} = -k_3 \\
 k_{31} = 0 & k_{32} = -k_3 & k_{33} = k_3
 \end{array}$$

La matrice di rigidezza, mettendo in evidenza il coefficiente comune  $k_1$ , può essere scritta come il prodotto del coefficiente  $k_1$  per una matrice  $\mathbf{k}'$  adimensionale:

$$\mathbf{k} = k_1 \begin{bmatrix} 1.87223 & -0.87223 & 0 \\ -0.87223 & 1.31346 & -0.44123 \\ 0 & -0.44123 & 0.44123 \end{bmatrix} = k_1 \mathbf{k}'$$

### 3.2 DETERMINAZIONE DELLA MATRICE DELLE MASSE

La matrice delle masse è la matrice dei coefficienti della forma quadratica che esprime l'energia cinetica del sistema. L'espressione dell'energia cinetica  $T$  per il sistema in studio è particolarmente semplice:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1,3} m_i \dot{q}_i^2 = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{m} \dot{\mathbf{q}}$$

La matrice  $\mathbf{m}$ , mettendo in evidenza il fattore comune  $m_1$ , può anche essa essere scritta come il prodotto del fattore comune  $m_1$  per la matrice adimensionale  $\mathbf{m}'$ :

$$\mathbf{m} = m_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.75 \end{bmatrix} = m_1 \mathbf{m}'$$

#### 4 CALCOLO DEGLI AUTOVALORI ED AUTOVETTORI

Le oscillazioni libere del sistema, in assenza di fenomeni dissipativi, sono governate dall'equazione differenziale  $m\ddot{q} + kq = 0$ , completate dalle opportune condizioni iniziali. Ipotizzando un integrale particolare del tipo  $q = \varphi \sin(\omega t + \theta)$  le pulsazioni proprie  $\omega$  ed i modi propri di vibrare  $\varphi$  costituiscono rispettivamente le radici quadrate degli autovalori e gli autovettori del sistema algebrico omogeneo di equazione  $[k - \omega^2 m] \varphi = 0$ . Gli autovalori del sistema sono le radici dell'equazione caratteristica  $\det [k - \omega^2 m] = 0$ :

$$k_1 \begin{bmatrix} 1.87223 - \frac{m_1}{k_1} \omega^2 & -0.87223 & 0 \\ -0.87223 & 1.31346 - \frac{m_1}{k_1} \omega^2 & -0.44123 \\ 0 & -0.44123 & 0.44123 - 0.75 \frac{m_1}{k_1} \omega^2 \end{bmatrix} = 0$$

Ponendo  $D = \frac{m_1}{k_1} \omega^2$ , il determinante della matrice produce un polinomio di 3° grado nell'incognita  $D$  le cui radici sono di seguito riportate:

- Prima radice del polinomio:  $D_1 = \frac{m_1}{k_1} \omega_1^2 = 0.1966488$

$$\omega_1^2 = D_1 \frac{k_1}{m_1} = 0.19664877 \frac{22220.7(kN/m)}{64(t)} = 68.27595 rad/s^2$$

$$\omega_1 = 8.2629 rad/s \quad T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 0.760405s \quad f_1 = \frac{1}{T_1} = 1.3150 Hz$$

- Seconda radice del polinomio:  $D_2 = \frac{m_1}{k_1} \omega_2^2 = 1.020600$

$$\omega_2^2 = D_2 \frac{k_1}{m_1} = 1.020600 \frac{22220.7(KN/m)}{64(ton)} = 354.3504 rad/s^2$$

$$\omega_2 = 18.8442 rad/s \quad T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = 0.3339s \quad f_2 = \frac{1}{T_2} = 2.9960 Hz$$

- Terza radice del polinomio:  $D_3 = \frac{m_1}{k_1} \omega_3^2 = 2.556748$

$$\omega_3^2 = D_3 \frac{k_1}{m_1} = 2.55674225 \frac{22220.7(KN/m)}{64(ton)} = 887.6993 rad/s^2$$

$$\omega_3 = 29.7942 rad/s \quad T_3 = \frac{2\pi}{\omega_3} = 0.210885s \quad f_3 = \frac{1}{T_3} = 4.7419 Hz$$

Sostituendo una qualsiasi delle radici, la matrice dei coefficienti del sistema  $[k - \omega_i^2 m] \varphi_i = 0$  risulta di rango 2: i valori delle incognite del sistema (autovettori) possono essere determinati solo a meno di una costante moltiplicativa. Fissato quindi il valore di una qualunque delle componenti

dell'autovettore  $\boldsymbol{\varphi}_i$ , le altre componenti risultano univocamente determinate. Ad esempio, nel caso del primo autovettore si ottiene:

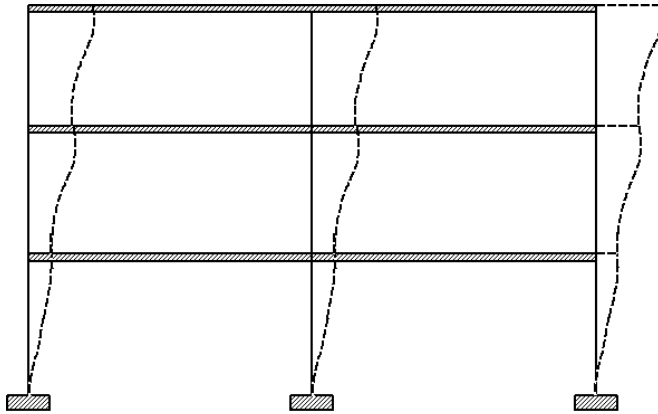
$$k_1 \begin{bmatrix} 1.87223 - D_1 & -0.87223 & 0 \\ -0.87223 & 1.31346 - D_1 & -0.44123 \\ 0 & -0.44123 & 0.44123 - 0.75D_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_{1,1} \\ \varphi_{2,1} \\ \varphi_{3,1} \end{bmatrix} = 0$$

Gli autovettori ottenuti vengono normalizzati rispetto alla matrice  $\mathbf{m}'$ ; si impone cioè che risulti, per ciascuno degli autovettori:

$$\boldsymbol{\varphi}_i^T \mathbf{m}' \boldsymbol{\varphi}_i = 1 \cdot \varphi_{i,1}^2 + 1 \cdot \varphi_{i,2}^2 + 0.75 \cdot \varphi_{i,3}^2 = 1$$

Le forme modali così ottenute sono rappresentate nella successiva Fig. 4.

- 1<sup>o</sup> Modo di vibrare della struttura

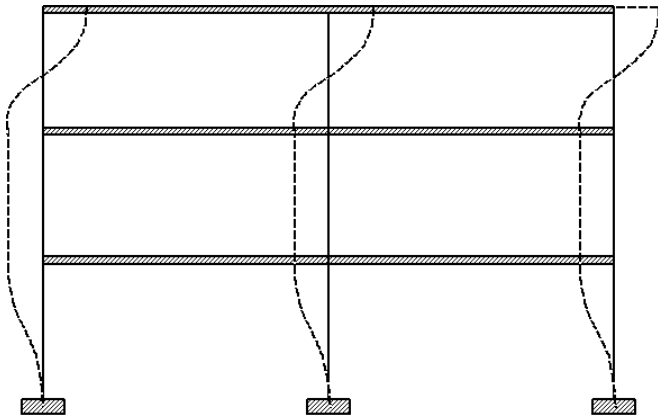


$$\boldsymbol{\varphi}_1 = \begin{bmatrix} 0.302398 \\ 0.5809211 \\ 0.8726100 \end{bmatrix}$$

$$\omega_1 = 8.2629 \text{ rad/s}$$

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 0.760405 \text{ s}$$

- 2<sup>o</sup> Modo di vibrare della struttura

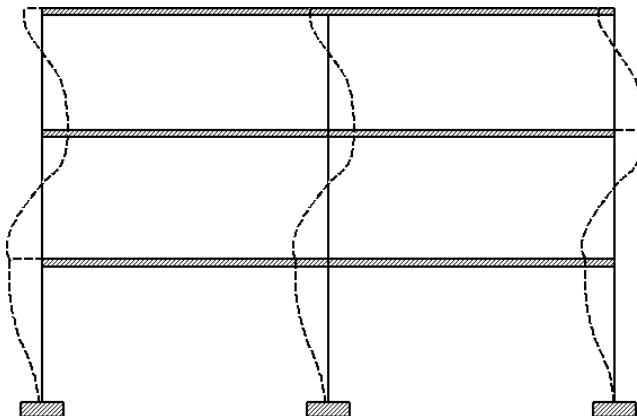


$$\boldsymbol{\varphi}_2 = \begin{bmatrix} -0.5523878 \\ -0.5393395 \\ 0.7339215 \end{bmatrix}$$

$$\omega_2 = 18.8442 \text{ rad/s}$$

$$T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = 0.3339 \text{ s}$$

- 3<sup>o</sup> Modo di vibrare della struttura



$$\boldsymbol{\varphi}_3 = \begin{bmatrix} -0.7768030 \\ 0.6096495 \\ -0.1822251 \end{bmatrix}$$

$$\omega_3 = 29.7942 \text{ rad/s}$$

$$T_3 = \frac{2\pi}{\omega_3} = 0.210885 \text{ s}$$

Fig. 4 – Forme modali del telaio in studio.

#### 4 RISPOSTA A CONDIZIONI INIZIALI

Immaginiamo ora che alla struttura sia stata applicata staticamente una forza  $F$  in direzione della coordinata libera  $q_3$ , producendo la deformata illustrata in Fig. 5, e che la forza venga successivamente rimossa, in maniera istantanea, all'istante  $t_0$ . La struttura inizierà ad oscillare intorno alla configurazione indeformata; in assenza di fenomeni di tipo dissipativo le oscillazioni continuano indefinitamente, e la risposta può essere determinata facendo uso dei modi propri appena determinati, imponendo al sistema le opportune condizioni iniziali.

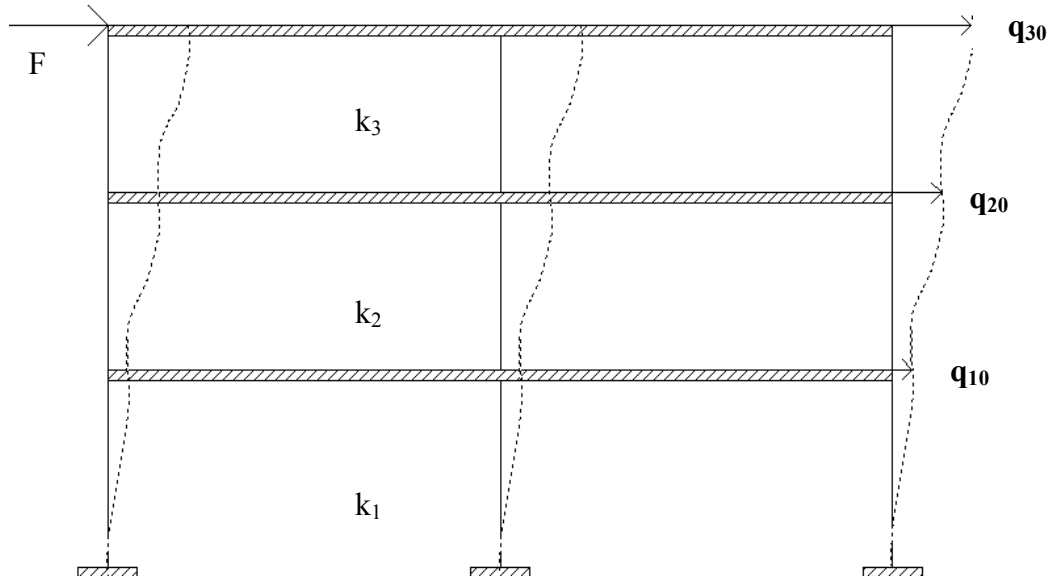


Fig. 5 – Configurazione deformata conseguente all'applicazione statica della forza  $F$ .

Staticamente la struttura può essere vista come l'assemblaggio di tre molle, di rigidezza  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$ , disposte in serie; pertanto gli spostamenti dei vari piani sono rispettivamente:

$$q_{10} = F \left( \frac{1}{k_1} \right) = \frac{F}{k_1}$$

$$q_{20} = F \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right) = \frac{F}{k_1} \left( 1 + \frac{1}{0.87223} \right) = 2.14649 \frac{F}{k_1}$$

$$q_{30} = F \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \right) = \frac{F}{k_1} \left( 1 + \frac{1}{0.87223} + \frac{1}{0.44123} \right) = 4.41288 \frac{F}{k_1}$$

Le oscillazioni libere sono esprimibili come combinazione lineare degli integrali particolari del sistema di equazioni differenziali appena determinati:

$$\mathbf{q} = \sum_i \lambda_i \boldsymbol{\varphi}_i \sin(\omega_i t + \vartheta_i)$$

o nella forma equivalente:

$$\mathbf{q} = \sum_i \boldsymbol{\varphi}_i (A_i \sin \omega_i t + B_i \cos \omega_i t)$$

$$\dot{\mathbf{q}} = \sum_i \boldsymbol{\varphi}_i (A_i \omega_i \cos \omega_i t - B_i \omega_i \sin \omega_i t)$$

Le costanti  $A_i$  e  $B_i$  vengono determinate in base alle condizioni iniziali, costituite rispettivamente dallo spostamento e dalla velocità all'istante  $t_0=0$ :

$$\mathbf{q}_0 = \sum_i B_i \boldsymbol{\varphi}_i = \begin{bmatrix} q_{10} \\ q_{20} \\ q_{30} \end{bmatrix} = \frac{F}{k_1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2.14649 \\ 4.41288 \end{bmatrix} \quad \dot{\mathbf{q}}_0 = \sum_i A_i \omega_i \boldsymbol{\varphi}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Poiché gli autovettori sono linearmente indipendenti le precedenti relazioni forniscono dei sistemi di equazioni algebriche nelle incognite  $A_i$  e  $B_i$  che ammettono una e una sola soluzione. In particolare, risulta evidente che i coefficienti  $A_i$  sono identicamente nulli, mentre i coefficienti  $B_i$  si ricavano dal seguente sistema:

$$\begin{cases} 0.3024B_1 - 0.5524B_2 - 0.7768B_3 = F/k_1 \\ 0.5809B_1 - 0.5393B_2 + 0.6096B_3 = 2.1465F/k_1 \\ 0.8726B_1 + 0.7339B_2 - 0.1822B_3 = 4.4129F/k_1 \end{cases}$$

la cui soluzione è:

$$B_1 = 4.4374F/k_1$$

$$B_2 = 0.7191F/k_1$$

$$B_3 = -0.07126F/k_1$$

Le oscillazioni libere risultano allora date da:

- $$q_1 = \sum_i \varphi_{i,1} B_i \cos \omega_i t = \varphi_{1,1} B_1 \cos \omega_1 t + \varphi_{2,1} B_2 \cos \omega_2 t + \varphi_{3,1} B_3 \cos \omega_3 t$$

$$q_1 = \frac{F}{k_1} (0.3024 \cdot 4.4374 \cdot \cos \omega_1 t - 0.5524 \cdot 0.7191 \cdot \cos \omega_2 t + 0.7768 \cdot 0.07125 \cdot \cos \omega_3 t)$$

$$q_1 = \frac{F}{k_1} (1.3419 \cdot \cos \omega_1 t - 0.3972 \cdot \cos \omega_2 t + 0.05535 \cdot \cos \omega_3 t)$$
- $$q_2 = \sum_i \varphi_{i,2} B_i \cos \omega_i t = \varphi_{1,2} B_1 \cos \omega_1 t + \varphi_{2,2} B_2 \cos \omega_2 t + \varphi_{3,2} B_3 \cos \omega_3 t$$

$$q_2 = \frac{F}{k_1} (0.5809 \cdot 4.4374 \cdot \cos \omega_1 t - 0.5393 \cdot 0.7191 \cdot \cos \omega_2 t + -0.6096 \cdot 0.07125 \cdot \cos \omega_3 t)$$

$$q_2 = \frac{F}{k_1} (2.5778 \cdot \cos \omega_1 t - 0.3879 \cdot \cos \omega_2 t - 0.04344 \cdot \cos \omega_3 t)$$
- $$q_3 = \sum_i \varphi_{i,3} B_i \cos \omega_i t = \varphi_{1,3} B_1 \cos \omega_1 t + \varphi_{2,3} B_2 \cos \omega_2 t + \varphi_{3,3} B_3 \cos \omega_3 t$$

$$q_3 = \frac{F}{k_1} (0.8726 \cdot 4.4374 \cdot \cos \omega_1 t - 0.7340 \cdot 0.7191 \cdot \cos \omega_2 t - 0.1822 \cdot 0.07125 \cdot \cos \omega_3 t)$$

$$q_3 = \frac{F}{k_1} (3.8721 \cdot \cos \omega_1 t - 0.5278 \cdot \cos \omega_2 t - 0.01298 \cdot \cos \omega_3 t)$$

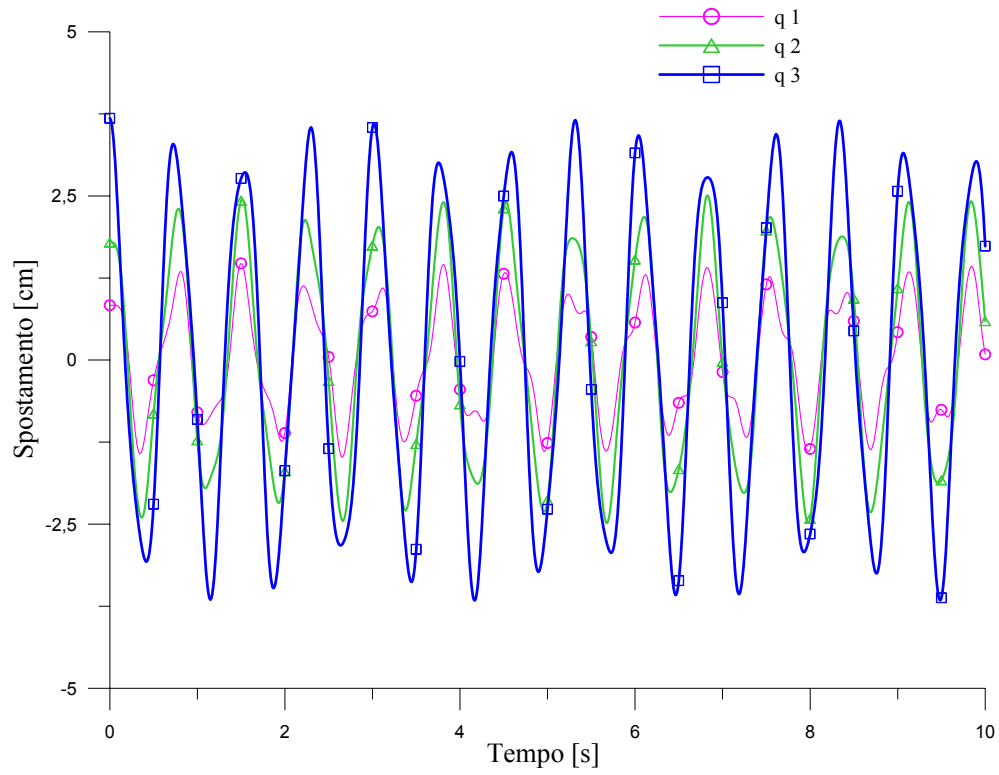


Fig. 6— Andamento temporale degli spostamenti dovuti all'applicazione di C.I. non omogenee.

## 5 VALORI INIZIALI IN COORDINATE PRINCIPALI

Si può osservare che la risposta della struttura alle condizioni iniziali date è prevalentemente fornita dal primo modo di vibrare. Per spiegare questo risultato è conveniente effettuare la trasformazione in termini del sistema di coordinate  $y$ , dette *coordinate principali*:

$$\mathbf{q} = \Phi \mathbf{y}$$

dove  $\Phi$  è la matrice che contiene, ordinati per colonna, gli autovettori del sistema. Premoltiplicando ambo i membri di questa relazione per la matrice  $\Phi^T \mathbf{m}$  e ricordando che  $\mathbf{M} = \Phi^T \mathbf{m} \Phi$  è una matrice diagonale, il valore assunto dalla  $i$ -esima coordinata principale all'istante  $t_0$  può essere ottenuto, dopo semplici passaggi, come:

$$y_{i0} = \frac{1}{M_i} \boldsymbol{\varphi}_i^T \mathbf{m} \mathbf{q}_0$$

Applicando tale relazione si ottiene:

$$\boldsymbol{\varphi}_i^T \mathbf{m} = m_1 \cdot \begin{bmatrix} 0.3024 & 0.5809 & 0.8726 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.75 \end{bmatrix}$$

$$\bullet \quad y_{10} = \frac{1}{M_1} \boldsymbol{\varphi}_1^T \mathbf{m} \mathbf{q}_0 = \frac{F}{k_1} [0.3024 \cdot 1 + 0.5809 \cdot 2.1465 + 0.8726 \cdot 4.4129 \cdot 0.75]$$

$$y_{10} = 4.4374 \frac{F}{k_1}$$

$$\bullet \quad y_{20} = \frac{1}{M_2} \boldsymbol{\varphi}_2^T \mathbf{m} \mathbf{q}_0 = \frac{F}{k_1} [-0.5524 \cdot 1 - 0.5393 \cdot 2.14649 + 0.7340 \cdot 4.4129 \cdot 0.75]$$

$$y_{20} = 0.7191 \frac{F}{k_1}$$

$$\bullet \quad y_{30} = \frac{1}{M_3} \boldsymbol{\varphi}_3^T \mathbf{m} \mathbf{q}_0 = \frac{F}{k_1} [-0.7768 \cdot 1 + 0.6096 \cdot 2.1465 - 0.1822 \cdot 4.4129 \cdot 0.75]$$

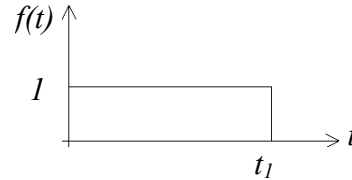
$$y_{30} = -0.07130 \frac{F}{k_1}$$

Dai risultati precedenti risulta evidente che le condizioni iniziali date al sistema sollecitano prevalentemente (anche se non esclusivamente) il primo modo, giustificando ampiamente i risultati ottenuti al paragrafo precedente.

## 6 RISPOSTA A FORZANTE COSTANTE

Ipotizziamo ora che sulla struttura in quiete nella posizione indeformata venga applicata all'istante  $t_0=0$  la forza  $F$  vista nel paragrafo 4. La forza rimane di entità costante fino all'istante  $t_1=8s$ , in cui viene rimossa. Le componenti generalizzate delle forze esterne vengono raccolte nel vettore  $\mathbf{Q}$ , di espressione:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F \end{bmatrix} \cdot f(t)$$



La funzione  $f(t)$ , rappresentata in figura, fornisce la variazione temporale della forza  $F$ . Le equazioni del moto diventano:

$$m \ddot{q} + k q = \mathbf{Q} \quad \text{per } 0 < t < t_1$$

L'integrazione di questo sistema di equazioni differenziali può essere agevolmente effettuata facendo uso della trasformazione in coordinate principali già presentata. Effettuando il cambio di coordinate e pre-moltiplicando tutti i termini per  $\Phi^T$  si ricava:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{K} \mathbf{y} = \Phi^T \mathbf{Q}$$

In questa equazione:

- $\mathbf{M} = \Phi^T \mathbf{m} \Phi$  è una matrice diagonale in cui, a causa della normalizzazione adottata per gli autovettori, tutti gli elementi diagonali sono pari a  $m_i$ :

$$M_i = \Phi_i^T \mathbf{m} \Phi_i = m_i$$

- $\mathbf{K} = \Phi^T \mathbf{k} \Phi = \mathbf{M} \mathbf{\Omega}$  dove  $\mathbf{\Omega}$  è la matrice diagonale che contiene i quadrati degli autovalori del sistema. L'equazione del moto che descrive le vibrazioni libere fornisce infatti:

$$\omega_i^2 = \frac{\Phi_i^T \mathbf{k} \Phi_i}{\Phi_i^T \mathbf{m} \Phi_i} = \frac{K_i}{M_i} \quad \Longrightarrow \quad K_i = M_i \omega_i^2 \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} M_1 \omega_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & M_2 \omega_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & M_3 \omega_3^2 \end{bmatrix}$$

$$M_1 \omega_1^2 = m_1 \cdot 0.1966488 \cdot \frac{k_1}{m_1} = 0.1966488 k_1$$

$$M_2 \omega_2^2 = m_1 \cdot 1.020600 \cdot \frac{k_1}{m_1} = 1.020600 k_1$$

$$M_3 \omega_3^2 = m_1 \cdot 2.556748 \cdot \frac{k_1}{m_1} = 2.556748 k_1$$

- Il vettore della forzante esterna diventa:

$$\Phi^T \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0.3024 & -0.5523 & -0.7768 \\ 0.5809 & -0.5393 & 0.6096 \\ 0.8726 & 0.7339 & -0.1822 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F \end{bmatrix} f(t) = \begin{bmatrix} 0.8726 \\ 0.7339 \\ -0.1822 \end{bmatrix} F \cdot f(t) = \mathbf{G} \cdot F \cdot f(t)$$

Poiché sia la matrice  $\mathbf{M}$  che la matrice  $\mathbf{K}$  sono diagonali, il sistema di equazioni differenziali si disaccoppia e l'equazione che regola la variazione di ciascuna coordinata libera assume la seguente forma:

$$\ddot{y}_i + \omega_i^2 y_i = \frac{1}{M_i} G_i \cdot F \cdot f(t)$$

L'integrale generale dell'equazione del moto nell'intervallo  $0, t_i$  risulta la somma

- dell'integrale generale dell'omogenea associata, che ha forma:

$$y_i = A_i \sin \omega_i t + B_i \cos \omega_i t;$$

- di un integrale particolare dell'equazione completa:

$$y_i = \frac{G_i F}{M_i \omega_i^2}.$$

Pertanto:

$$y_i = A_i \sin \omega_i t + B_i \cos \omega_i t + \frac{G_i F}{M_i \omega_i^2}$$

Le costanti d'integrazione si ottengono imponendo le condizioni iniziali omogenee:

$$t=0 \quad y_i=0 \quad 0 = B_i + \frac{G_i F}{M_i \omega_i^2} \quad \Rightarrow \quad B_i = -\frac{G_i F}{M_i \omega_i^2}$$

$$t=0 \quad \dot{y}_i = 0 \quad 0 = A_i$$

Si ottiene:

$$y_i = \frac{G_i F}{M_i \omega_i^2} (1 - \cos \omega_i t)$$

Nota la variazione temporale delle coordinate principali è possibile ritornare alle coordinate libere utilizzate per descrivere il moto del sistema:

$$q_i = \sum_j \phi_{j,i} y_j = \sum_j \phi_{j,i} \frac{G_j F}{M_j \omega_j^2} (1 - \cos \omega_j t)$$

- $q_1 = \phi_{1,1} y_1 + \phi_{2,1} y_2 + \phi_{3,1} y_3$

$$q_1 = \frac{F}{k_1} \left[ 0.3024 \frac{0.8726}{0.1966} (1 - \cos \omega_1 t) - 0.5524 \frac{0.7340}{1.0206} (1 - \cos \omega_2 t) - 0.7768 \frac{(-0.1822)}{2.5567} (1 - \cos \omega_3 t) \right]$$

$$q_1 = \frac{F}{k_1} [1.3419 \cdot (1 - \cos \omega_1 t) - 0.3972 \cdot (1 - \cos \omega_2 t) + 0.05536 \cdot (1 - \cos \omega_3 t)]$$

- $q_2 = \phi_{1,2} y_1 + \phi_{2,2} y_2 + \phi_{3,2} y_3$

$$q_2 = \frac{F}{k_1} \left[ 0.5809 \frac{0.8726}{0.1966} (1 - \cos \omega_1 t) - 0.5393 \frac{0.7340}{1.0206} (1 - \cos \omega_2 t) + 0.6096 \frac{(-0.18221)}{2.5567} (1 - \cos \omega_3 t) \right]$$

$$q_2 = \frac{F}{k_1} [2.57784 (1 - \cos \omega_1 t) - 0.3878 (1 - \cos \omega_2 t) + 0.04345 (1 - \cos \omega_3 t)]$$

- $q_3 = \phi_{1,3} y_1 + \phi_{2,3} y_2 + \phi_{3,3} y_3$

$$q_3 = \frac{F}{k_1} \left[ 0.8726 \frac{0.8726}{0.1966} (1 - \cos \omega_1 t) + 0.7340 \frac{0.7340}{1.0206} (1 - \cos \omega_2 t) - 0.1822 \frac{(-0.1822)}{2.5567} (1 - \cos \omega_3 t) \right]$$

$$q_3 = \frac{F}{k_1} [3.8721 \cdot (1 - \cos \omega_1 t) + 0.5279 \cdot (1 - \cos \omega_2 t) + 0.01299 \cdot (1 - \cos \omega_3 t)]$$

Per  $t > t_1$  il sistema è soggetto ad oscillazioni libere con condizioni iniziali non nulle e pari al valore finale assunto dalle coordinate all'istante  $t_1$ ; le condizioni iniziali possono essere espresse direttamente in termini di coordinate principali:

$$y_{i,t > t_1} = A_i \sin \omega_i (t - t_1) + B_i \cos \omega_i (t - t_1) \quad \text{per } t > t_1$$

con

$$A_i = \frac{\dot{y}_i(t_1)}{\omega_i} \quad B_i = y_i(t_1).$$

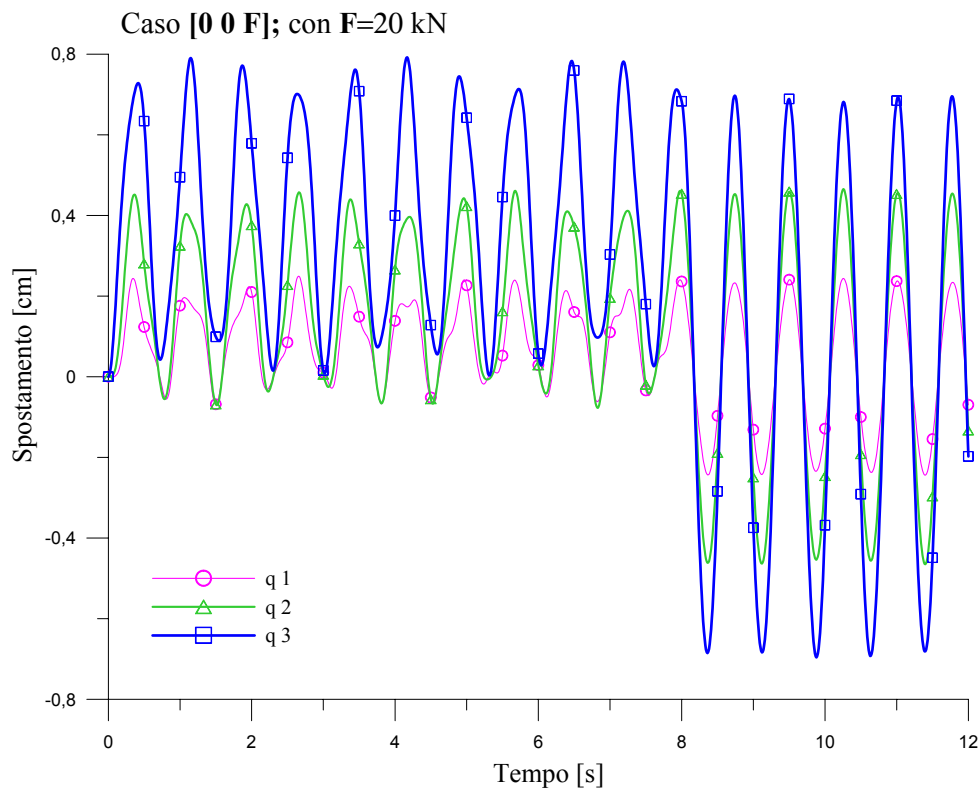


Fig. 7– Andamento temporale degli spostamenti dovuti all'applicazione di una forzante costante.

## 7 RISPOSTA A FORZANTE ARMONICA

Supponiamo ora che sulla struttura in quiete nella configurazione indeformata venga applicata una forzante con la stessa distribuzione spaziale vista nel caso precedente, ma variazione temporale di tipo armonico:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F \end{bmatrix} \sin \omega t \quad \text{con: } F=10 \text{ kN} \quad \omega=2.5 \pi \text{ rad/s} = 7.854 \text{ rad/s}$$

In tale caso lo smorzamento strutturale assume un'importanza notevole nella determinazione della risposta e non può più essere trascurato. Se le caratteristiche dissipative sono sufficientemente uniformi su tutta la struttura, è usuale ipotizzare che la trasformazione in coordinate principali, basata sulle forme modali della struttura priva di smorzamento e tale da rendere diagonali le matrici di massa e rigidità, sia in grado di diagonalizzare anche la matrice di smorzamento. Quest'ultima non viene in realtà assemblata, ma si assegna semplicemente il valore dello smorzamento modale. Nel caso in studio si assume un coefficiente di smorzamento pari al 5% ( $\nu_i = 0.05$ ) del critico per tutti i modi. L'equazione del moto in termini di coordinate  $\mathbf{q}$  può essere scritta come:

$$\mathbf{m} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{c} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{k} \mathbf{q} = \mathbf{Q}$$

In coordinate principali la  $i$ -esima equazione diventa:

$$M_i \ddot{y}_i + C_i \dot{y}_i + \omega_i^2 M_i y_i = G'_i = \sum_j \phi_{i,j} Q_j = G'_i \cdot F \cdot \sin \omega t$$

Dividendo tutti i termini per  $M_i$  si ottiene:

$$\ddot{y}_i + 2\nu_i \omega_i \dot{y}_i + \omega_i^2 y_i = \frac{1}{M_i} G'_i = \frac{1}{M_i} \sum_j \phi_{i,j} Q_j = \frac{G'_i F}{M_i} \sin \omega t$$

Ricordiamo che:

$$M_1 = M_2 = M_3 = m_1 = 64 \text{ t}$$

$$\omega_1 = 8.2629 \text{ rad/s}$$

$$\omega_2 = 18.8442 \text{ rad/s}$$

$$\omega_3 = 29.7942 \text{ rad/s}$$

$$\omega_1^2 M_1 = 4369.67 \text{ t (rad/s)}^2$$

$$\omega_2^2 M_2 = 22678.496 \text{ t (rad/s)}^2$$

$$\omega_3^2 M_3 = 56812.6 \text{ t (rad/s)}^2$$

Il vettore  $\mathbf{G}'$  vale:

$$\mathbf{G}' = \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0.8726 \\ 0.7340 \\ -0.1822 \end{bmatrix} F \sin \omega t = \mathbf{G} F \sin \omega t$$

L'integrale generale dell'equazione del moto è dato dalla somma:

- dell'integrale generale dell'omogenea associata che ha forma

$$y_i(t) = e^{-\nu \omega_i t} (C_i \cos \Omega_i t + D_i \sin \Omega_i t) \quad \text{con } \Omega_i = \omega_i \sqrt{1 - \nu^2}$$

- e di un integrale particolare dell'equazione completa

$$y_i(t) = \frac{G_i F}{M_i \omega_i^2} N_i \sin(\omega t - \zeta_i)$$

Il fattore di amplificazione  $N$  e l'angolo di fase  $\zeta$  vengono espressi in funzione del rapporto  $\beta_i$  tra la pulsazione della forzante e la pulsazione propria del modo considerato  $\beta_i = \omega/\omega_i$ :

$$N = \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta_i^2)^2 + 4\nu^2 \beta_i^2}} \quad \text{tg } \zeta = \frac{2\nu\beta_i}{1 - \beta_i^2}$$

Imponendo le condizioni iniziali (omogenee) si ottiene il valore delle costanti di integrazione:

$$t=0 \quad \underline{y}(0) = \underline{0} \quad y_i(0) = C_i + \frac{G_i F}{M_i \omega_i^2} N_i \sin(-\zeta_i) = 0$$

$$C_i = \frac{G_i F}{M_i \omega_i^2} N_i \sin(\zeta_i)$$

$$t=0 \quad \underline{\dot{y}}(0) = \underline{0} \quad \dot{y}_i(t) = -\nu\omega_i e^{-\nu\omega_i t} (C_i \cos \Omega_i t + D_i \sin \Omega_i t) + \Omega_i e^{-\nu\omega_i t} (-C_i \sin \Omega_i t + D_i \cos \Omega_i t) + \frac{G_i F}{M_i \omega_i^2} N_i \omega \cos(\omega t - \zeta_i)$$

$$\dot{y}_i(0) = -\nu\omega_i C_i + \Omega_i D_i + \frac{G_i F}{M_i \omega_i^2} N_i \omega \cos(-\zeta_i) = 0$$

$$D_i = \frac{1}{\Omega_i} \frac{G_i F}{M_i \omega_i^2} N_i (\nu\omega_i \sin(\zeta_i) - \omega \cos(-\zeta_i))$$

Note le costanti l'integrale generale si presenta nella forma:

$$y_i(t) = e^{-\nu\omega_i t} (C_i \cos \Omega_i t + D_i \sin \Omega_i t) + \frac{G_i F}{M_i \omega_i^2} N_i \sin(\omega t - \zeta_i)$$

Il primo termine dell'integrale generale, che svanisce al crescere di  $t$  tanto più rapidamente quanto più sono alti lo smorzamento e la pulsazione modale, rappresenta il transitorio, ovvero la parte della risposta che è deputata a soddisfare le condizioni iniziali. Il secondo termine rappresenta invece le oscillazioni a regime, che si instaurano dopo un certo lasso di tempo dall'applicazione del carico. E' possibile passare dalle coordinate principali alle coordinate libere iniziali attraverso la trasformazione  $\mathbf{q} = \Phi \mathbf{y}$  ovvero:

$$q_1 = \phi_{1,1} y_1(t) + \phi_{2,1} y_2(t) + \phi_{3,1} y_3(t)$$

$$q_2 = \phi_{1,2} y_1(t) + \phi_{2,2} y_2(t) + \phi_{3,2} y_3(t)$$

$$q_3 = \phi_{1,3} y_1(t) + \phi_{2,3} y_2(t) + \phi_{3,3} y_3(t)$$

Per il caso in studio si ricava:

- 1<sup>o</sup> modo di vibrare       $\omega_1=8.2629 \text{ rad/s}$        $\beta_1 = 0.9505$        $N_1 = 7.381$

$\text{tg}\zeta_1 = 0.9847$        $\zeta_1 = 0.7776 \text{ rad}$        $\cos \zeta_1 = 0.7208$   
 $\sin \zeta_1 = 0.6931$

$$C_1 = \frac{0.8726 \cdot 10t}{68.2761 \text{rad/s}^2 \cdot m_1} \cdot 7.3816 \cdot 0.6931 = \frac{0.6619}{m_1}$$

$$D_1 = \frac{1}{8.2629\sqrt{1-0.05^2}} \cdot \frac{0.8726 \cdot 10t}{68.2761 \text{rad/s}^2 \cdot m_1} \cdot 7.3816 \cdot (0.05 \cdot 8.2629(\text{rad/s}) \cdot 0.6931 +$$

$$- 7.8540(\text{rad/s}) \cdot 0.7208) = -\frac{0.5782}{m_1}$$
- 2<sup>o</sup> modo di vibrare       $\omega_2=18.8442 \text{ rad/s}$        $\beta_2 = 0.4168$        $N_2 = 1.209$

$\text{tg}\zeta_2 = 0.050440$        $\zeta_2 = 0.05047 \text{ rad}$        $\cos \zeta_2 = 0.99873$   
 $\sin \zeta_2 = 0.05038$

$$C_2 = \frac{0.7340 \cdot 10t}{354.3515 \text{rad/s}^2 \cdot m_1} \cdot 1.1806 \cdot 0.05038 = \frac{0.001231}{m_1}$$

$$D_2 = \frac{1}{18.8442\sqrt{1-0.05^2}} \cdot \frac{0.7340 \cdot 10t}{354.3515 \text{rad/s}^2 \cdot m_1} \cdot 1.1806 \cdot (0.05 \cdot 18.8442(\text{rad/s}) \cdot 0.05028 +$$

$$- 7.8540(\text{rad/s}) \cdot 0.9987) = -\frac{0.009899}{m_1}$$
- 3<sup>o</sup> modo di vibrare       $\omega_3=29.7942 \text{ rad/s}$        $\beta_3 = 0.2636$        $N_3=1.074$

$\text{tg}\zeta_3 = 0.02833$        $\zeta_3 = 0.02832 \text{ rad}$        $\cos \zeta_3 = 0.9996$   
 $\sin \zeta_3 = 0.02832$

$$C_3 = \frac{(-0.1822251) \cdot 10kN}{887.6969 \text{rad/s}^2 \cdot m_1} \cdot 1.0661558 \cdot 0.028317964 = -\frac{5.95156 \cdot 10^{-5}}{m_1}$$

$$D_3 = \frac{1}{29.7942\sqrt{1-0.05^2}} \cdot \frac{(-0.1822) \cdot 10kN}{887.6969 \text{rad/s}^2 \cdot m_1} \cdot 1.0662 \cdot (0.05 \cdot 29.7942(\text{rad/s}) \cdot 0.02832 +$$

$$- 7.8540(\text{rad/s}) \cdot 0.9996) = \frac{5.5151 \cdot 10^{-4}}{m_1}$$

Nella successiva Fig. 8 è riportato l'andamento temporale degli spostamenti di piano nei primi 10s successivi all'applicazione del carico. Dopo tale intervallo si può ritenere che il transitorio si sia esaurito e che la risposta sia in condizioni di regime. Dall'esame di questa figura si osserva come gli spostamenti dei diversi piani siano in fase e con un rapporto tra gli spostamenti analogo a quello prescritto dal primo modo. La forzante armonica infatti, sia per la distribuzione del carico sulla struttura sia per la pulsazione della forzante, eccita soprattutto il primo modo.

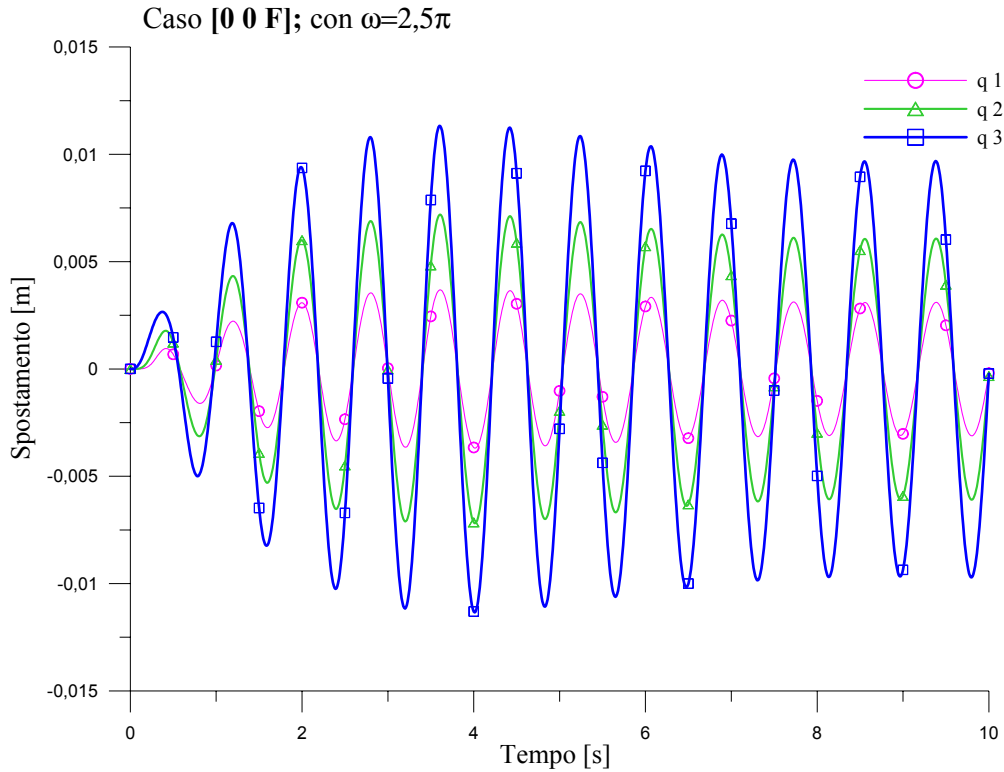
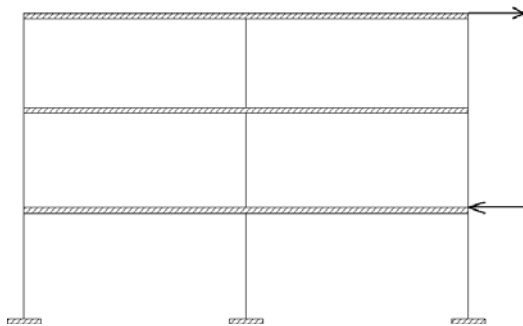


Fig. 8 – Andamento temporale degli spostamenti dovuti alla forzante armonica con  $\beta_1=0.95$ .

Per analizzare l'effetto che la distribuzione del carico sulla struttura ha sulla risposta si considera ora, a parità di pulsazione, una forzante il cui andamento dovrebbe eccitare più fortemente il secondo modo. Si considera pertanto la forzante:



$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -F \\ 0 \\ F \end{bmatrix} \text{sen } \omega t$$

con  $F=10 \text{ kN}$  e  $\omega=2.5 \cdot \pi \text{ rad/s}$

Il vettore dei carichi nel sistema di coordinate principali vale  $\mathbf{G}' = \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0.5702 \\ 1.2863 \\ 0.5946 \end{bmatrix} F \text{sen } \omega t$

Tenendo conto che l'angolo di fase non è variato rispetto al caso precedente, la risposta è caratterizzata dai seguenti parametri:

- 1<sup>o</sup> modo di vibrare  $\omega_1=8.2629 \text{ rad/s}$   $\beta_1 = 0.950$   $N_1=7.381$

$$C_1 = \frac{(0.5702) \cdot 10 \text{ kN}}{68.2761 \text{ rad/s}^2 \cdot m_1} \cdot 7.381 \cdot (0.6931) = \frac{0.4326}{m_1}$$

$$D_1 = \frac{1}{8.2629 \sqrt{1-0.05^2}} \cdot \frac{(0.5702) \cdot 10 \text{ kN}}{68.2761 \text{ rad/s}^2 \cdot m_1} \cdot 7.381 \cdot (0.05 \cdot 8.2629 \text{ (rad/s)} \cdot (0.6931) +$$

$$-7.854 \text{ (rad/s)} \cdot 0.7208) = -\frac{0.3963}{m_1}$$

- 2<sup>o</sup> modo di vibrare  $\omega_2=18.8442 \text{ rad/s}$   $\beta_2 = 0.4168$   $N_2=1.209$

$$C_2 = \frac{(1.2863) \cdot 10 \text{ kN}}{354.3515 \text{ rad/s}^2 \cdot m_1} \cdot 1.209 \cdot 0.05038 = \frac{2.2146 \cdot 10^{-3}}{m_1}$$

$$D_2 = \frac{1}{18.8442 \sqrt{1-0.05^2}} \cdot \frac{(1.2863) \cdot 10 \text{ kN}}{354.3515 \text{ rad/s}^2 \cdot m_1} \cdot 1.209 \cdot (0.05 \cdot 18.8442 \text{ (rad/s)} \cdot 0.05038 +$$

$$-7.854 \text{ (rad/s)} \cdot 0.9987) = -\frac{0.01820}{m_1}$$

- 3<sup>o</sup> modo di vibrare  $\omega_3=29.7942 \text{ rad/s}$   $\beta_3 = 0.2636$   $N_3=1.074$

$$C_3 = \frac{(0.5946) \cdot 10 \text{ kN}}{887.6969 \text{ rad/s}^2 \cdot m_1} \cdot 1.074 \cdot 0.02832 = \frac{2.0374 \cdot 10^{-4}}{m_1}$$

$$D_3 = \frac{1}{29.7942 \sqrt{1-0.05^2}} \cdot \frac{(0.5946) \cdot 10 \text{ kN}}{887.6969 \text{ rad/s}^2 \cdot m_1} \cdot 1.074 \cdot (0.05 \cdot 29.7942 \text{ (rad/s)} \cdot 0.02832 +$$

$$-7.854 \text{ (rad/s)} \cdot 0.9996) = -\frac{1.8883 \cdot 10^{-3}}{m_1}$$

I risultati possono essere raccolti nella seguente tabella, in cui con  $y_{stat}$  si indica il valore della coordinata principale calcolato a meno del fattore di amplificazione (quindi in condizioni statiche):

$$y_{stat} = \frac{G_i F}{M_i \omega_i^2}$$

Modo	$\beta_i$	$N_i$	$\zeta$	$C_i \cdot m_1$	$D_i \cdot m_1$	$N_i y_{Stat} \cdot m_1$
1	0.9500	7.381	0.77760	$4.3260 \cdot 10^{-1}$	$-3.96315 \cdot 10^{-1}$	$6.1646 \cdot 10^{-1}$
2	0.4168	1.209	0.05047	$2.2146 \cdot 10^{-3}$	$-1.82030 \cdot 10^{-2}$	$4.3887 \cdot 10^{-2}$
3	0.2636	1.074	0.02832	$2.0374 \cdot 10^{-4}$	$-1.88826 \cdot 10^{-3}$	$7.1936 \cdot 10^{-3}$

La successiva Fig. 9, che riporta l'andamento temporale delle coordinate libere, mostra, pur a parità di forma generale della risposta, una diminuzione nei valori massimi degli spostamenti, che può essere attribuita alla differente distribuzione della forzante esterna sulla struttura.

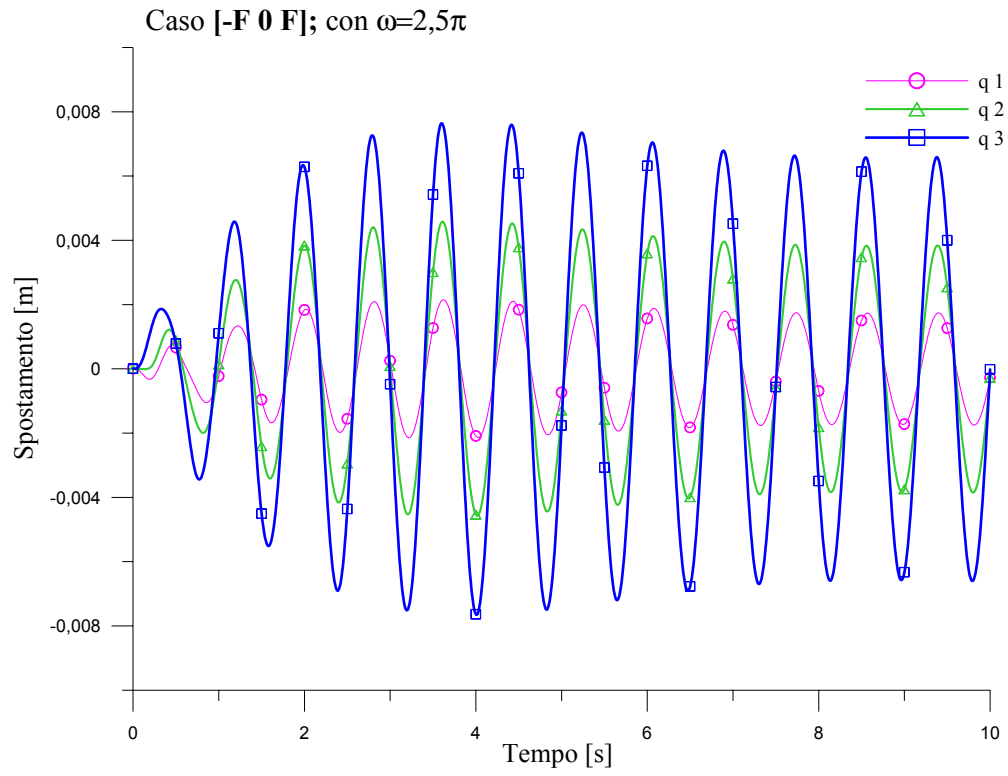


Fig. 9 – Andamento temporale degli spostamenti dovuti alla forzante armonica con  $\beta_1=0.95$ .

### 7.1 EFFETTI DELLA PULSAZIONE DELLA FORZANTE SULLA RISPOSTA .

Per analizzare l'effetto che la pulsazione della forzante ha sulla risposta strutturale, verranno nel seguito analizzati i casi in cui, mantenendo costante la distribuzione spaziale della forzante sulla struttura, si assume una pulsazione tale per cui rispettivamente  $\beta_2$  e  $\beta_3$  sono uguali al valore di  $\beta_1$  precedentemente analizzato. Verranno infine analizzati tre casi in cui la pulsazione della forzante assume un valore intermedio tra le pulsazioni di due modi contigui.

Il primo caso  $\beta_2=\beta_1$  corrisponde ad una pulsazione della forzante pari a  $\omega =17.90 \text{ rad/s}$

Modo	$\beta_i$	$N_i$	$\zeta$	$C_i \cdot m_1$	$D_i \cdot m_1$	$N_i y_{Stat} \cdot m_1$
1	2.166	0.270	3.08300	$1.3220 \cdot 10^{-3}$	$4.8963 \cdot 10^{-2}$	$2.25500 \cdot 10^{-2}$
2	0.950	7.381	0.77760	$1.8949 \cdot 10^{-1}$	$-1.7223 \cdot 10^{-1}$	$2.67930 \cdot 10^{-3}$
3	0.600	1.558	0.09374	$0.9767 \cdot 10^{-3}$	$-6.2011 \cdot 10^{-3}$	$1.04375 \cdot 10^{-2}$

Il caso  $\beta_3=\beta_1$  corrisponde ad una pulsazione della forzante pari a  $\omega =28.30 \text{ rad/s}$

Modo	$\beta_i$	$N_i$	$\zeta$	$C_i \cdot m_1$	$D_i \cdot m_1$	$N_i y_{Stat} \cdot m_1$
1	3.425	0.093	3.1100	$2.48187 \cdot 10^{-4}$	$2.66764 \cdot 10^{-2}$	$7.78044 \cdot 10^{-3}$
2	1.502	0.788	3.0230	$3.38711 \cdot 10^{-3}$	$4.29149 \cdot 10^{-2}$	$2.86044 \cdot 10^{-2}$
3	0.950	7.381	0.77760	$3.42455 \cdot 10^{-2}$	$-3.17974 \cdot 10^{-2}$	$4.43790 \cdot 10^{-2}$

L'andamento temporale degli spostamenti nei due casi è riportato nelle successive figure 10 e 11; si può osservare come la massima ampiezza di spostamento subisca un notevole decremento rispetto al caso in cui il modo più vicino alla risonanza era il primo. Nella figura 10 si può notare che la storia temporale dello spostamento del primo e del secondo piano è praticamente coincidente, e che il terzo piano è in opposizione di fase con i restanti due, riproducendo l'andamento degli spostamenti prescritto dal secondo modo. La figura 11 appare di lettura più difficile, anche a causa della elevata frequenza della forzante; in essa è comunque possibile distinguere ancora l'andamento degli spostamenti dettato dal terzo modo, quantunque sia evidente che la risposta contiene anche componenti dei modi inferiori. Il massimo valore degli spostamenti è nettamente inferiore a quello dei casi precedenti. La durata del transitorio si riduce al crescere della pulsazione della forzante, perché in tali caso è prevalente l'effetto dei modi a maggiore pulsazione (e che quindi hanno un transitorio più breve).

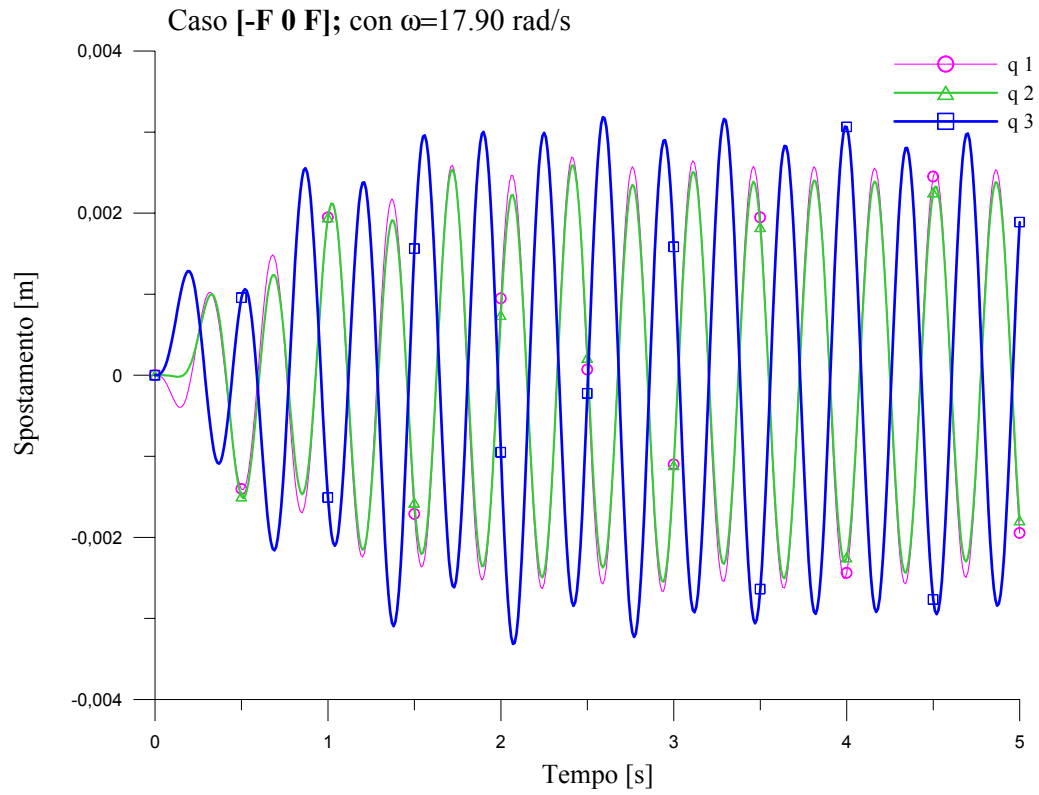


Fig. 10 – Andamento temporale degli spostamenti dovuti alla forzante armonica con  $\beta_2=0.95$ .

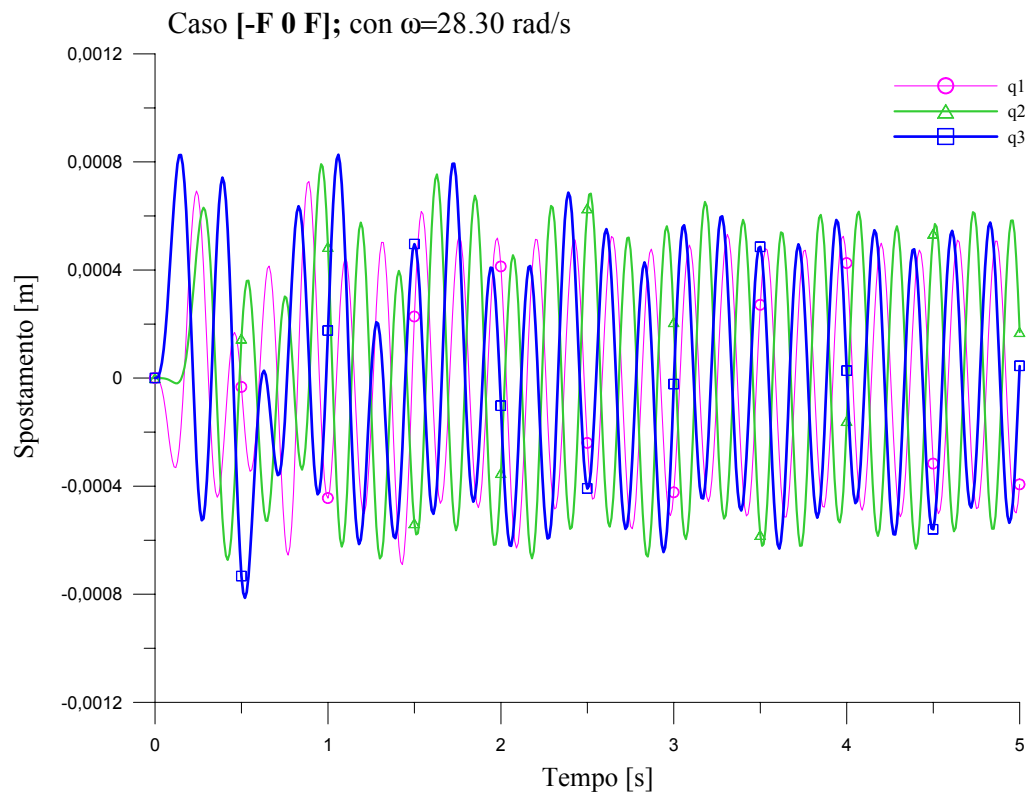


Fig. 11 – Andamento temporale degli spostamenti dovuti alla forzante armonica con  $\beta_3=0.95$ .

Si analizzano infine i casi in cui, a parità di distribuzione della forzante sulla struttura, la sua pulsazione vale rispettivamente 10, 15 e 25 rad/s

Caso 1:  $\omega=10$  rad/s

Modo	$\beta_i$	$N_i$	$\zeta$	$C_i \cdot m_1$	$D_i \cdot m_1$	$N_i y_{Stat} \cdot m_1$
1	1.2102	2.083	2.8870	$4.3840 \cdot 10^{-2}$	$2.0616 \cdot 10^{-1}$	$1.6954 \cdot 10^{-1}$
2	0.5307	1.389	0.07387	$3.7212 \cdot 10^{-3}$	$-2.6567 \cdot 10^{-2}$	$5.0407 \cdot 10^{-2}$
3	0.3356	1.126	0.03781	$2.8511 \cdot 10^{-4}$	$-2.5187 \cdot 10^{-3}$	$7.5434 \cdot 10^{-3}$

Caso 2:  $\omega=15$  rad/s

Modo	$\beta_i$	$N_i$	$\zeta$	$C_i \cdot m_1$	$D_i \cdot m_1$	$N_i y_{Stat} \cdot m_1$
1	1.815	0.434	3.063	$2.85945 \cdot 10^{-3}$	$6.58701 \cdot 10^{-2}$	$3.62300 \cdot 10^{-2}$
2	0.796	2.676	0.215	$2.07201 \cdot 10^{-2}$	$-7.46835 \cdot 10^{-2}$	$9.71134 \cdot 10^{-2}$
3	0.335	1.336	0.067	$6.02249 \cdot 10^{-4}$	$-4.47295 \cdot 10^{-3}$	$0.89503 \cdot 10^{-2}$

Caso 3:  $\omega=25$  rad/s.

Modo	$\beta_i$	$N_i$	$\zeta$	$C_i \cdot m_1$	$D_i \cdot m_1$	$N_i y_{Stat} \cdot m_1$
1	3.0225	0.123	3.105	$0.3796 \cdot 10^{-3}$	$3.0990 \cdot 10^{-2}$	$1.0240 \cdot 10^{-2}$
2	1.3267	1.290	2.969	$8.0213 \cdot 10^{-3}$	$6.1751 \cdot 10^{-2}$	$4.8147 \cdot 10^{-2}$
3	0.8391	3.251	0.276	$5.9390 \cdot 10^{-3}$	$-1.7304 \cdot 10^{-2}$	$2.1780 \cdot 10^{-2}$

L'andamento temporale degli spostamenti per i tre casi è descritto nelle successive Figure 12, 13 e 14. Si può osservare come il valore assoluto dei massimi spostamenti decresca al crescere della pulsazione della forzante (e quindi al decrescere del contributo del primo modo); in tutte le figure è evidente che le storie temporali degli spostamenti risentono di più di un modo, non essendo più possibile individuare un modo prevalente di deformarsi della struttura.

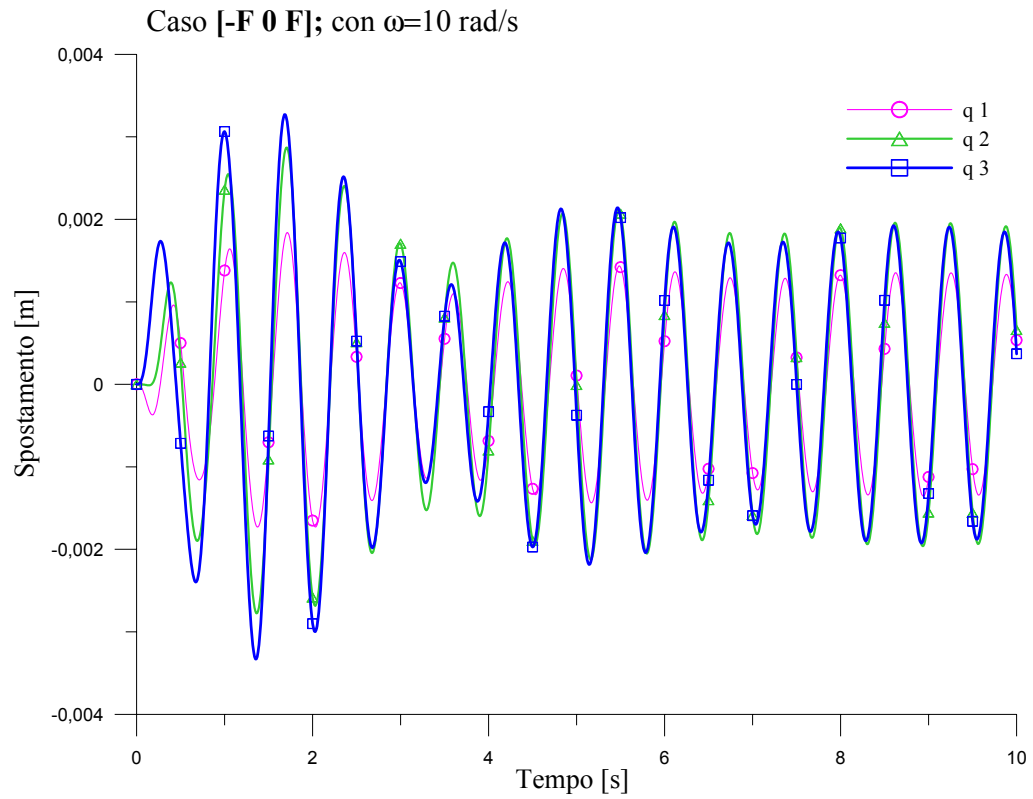


Fig. 12 – Andamento temporale degli spostamenti dovuti alla forzante armonica con  $\omega=10$  rad/s.

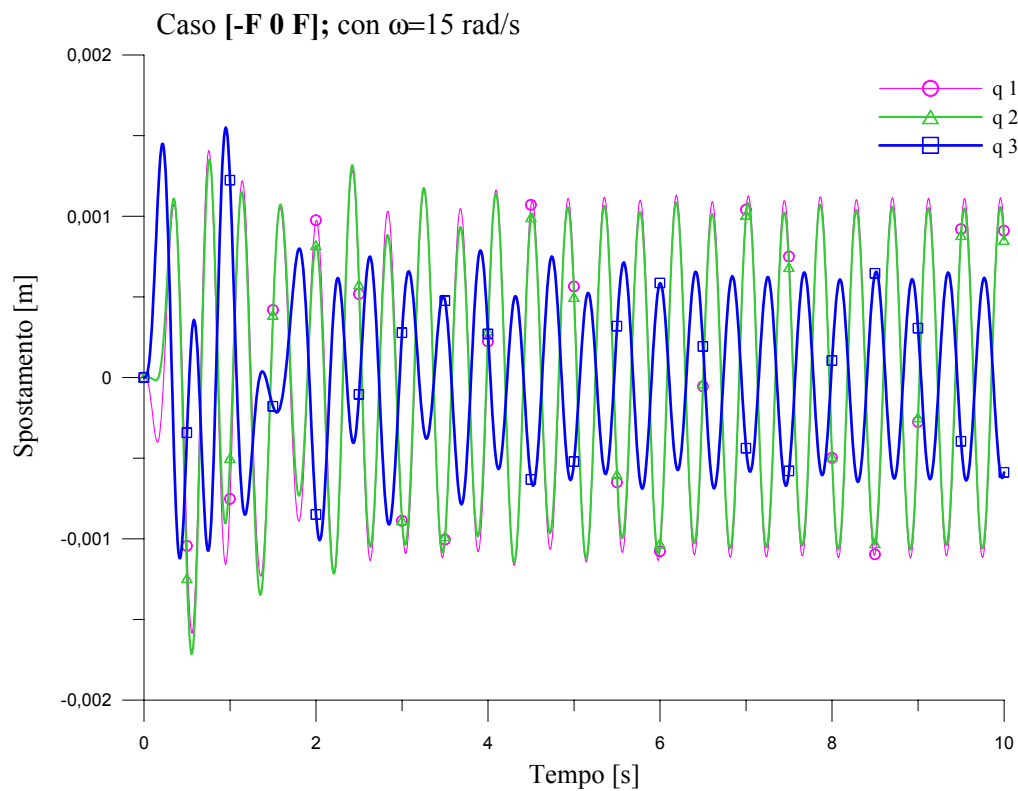


Fig. 13 – Andamento temporale degli spostamenti dovuti alla forzante armonica con  $\omega=15$  rad/s.

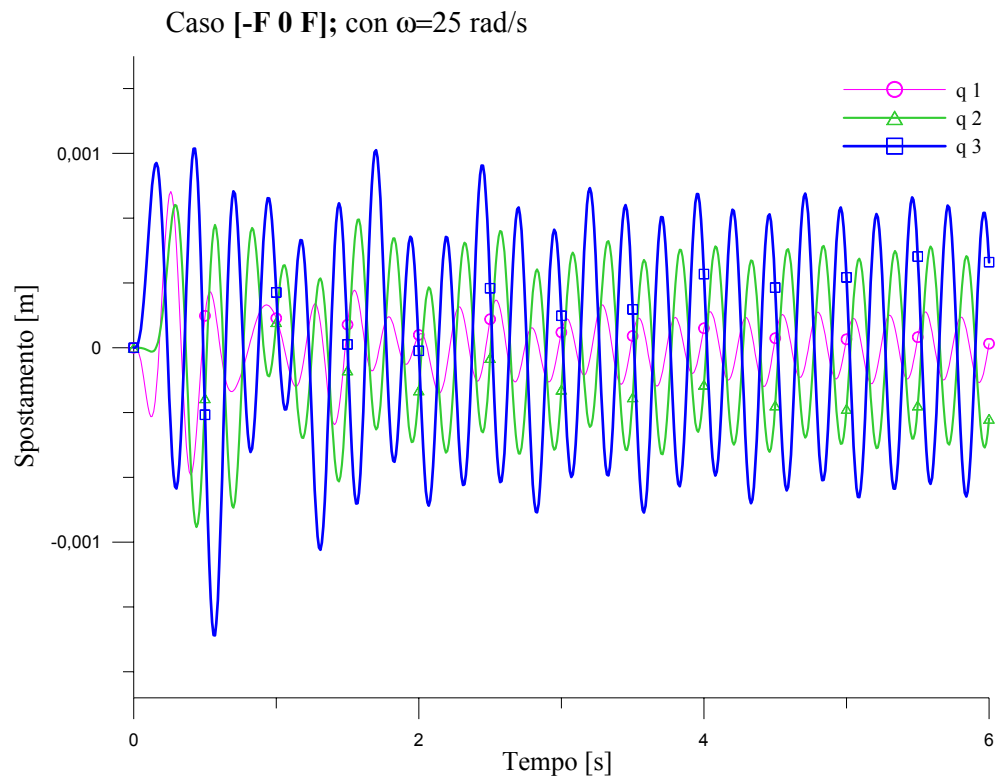


Fig. 14 – Andamento temporale degli spostamenti dovuti alla forzante armonica con  $\omega=25$  rad/s.

Ricapitolando:

Modo	$\omega$	$N$	$\zeta/\pi$	$C_i m_l$	$D_i m_l$	$N_{ysr} m_l$
1	$2.5 \cdot \pi$	7.381	0.24752	$4.3260 \cdot 10^{-1}$	$-3.9631 \cdot 10^{-1}$	$6.1646 \cdot 10^{-1}$
	10	2.083	0.91896	$4.3840 \cdot 10^{-2}$	$2.0616 \cdot 10^{-1}$	$1.6954 \cdot 10^{-1}$
	15	0.434	0.97498	$2.8594 \cdot 10^{-3}$	$6.5870 \cdot 10^{-2}$	$3.6230 \cdot 10^{-2}$
	17.90	0.270	0.98135	$1.3220 \cdot 10^{-3}$	$4.8963 \cdot 10^{-2}$	$2.2550 \cdot 10^{-2}$
	25	0.123	0.98835	$0.3796 \cdot 10^{-3}$	$3.0990 \cdot 10^{-2}$	$1.0240 \cdot 10^{-2}$
	28.30	0.093	0.98994	$2.4819 \cdot 10^{-4}$	$2.6676 \cdot 10^{-2}$	$7.7804 \cdot 10^{-3}$

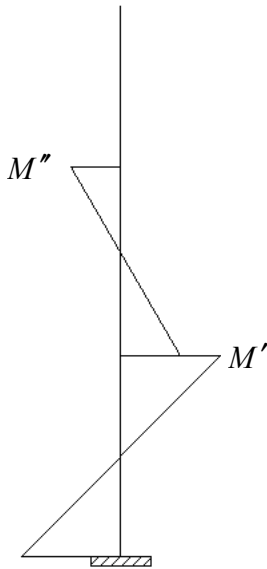
2	$2.5 \cdot \pi$	1.209	0.01606	$2.2146 \cdot 10^{-3}$	$-1.8203 \cdot 10^{-2}$	$4.3887 \cdot 10^{-2}$
	10	1.389	0.02351	$3.7212 \cdot 10^{-3}$	$-2.6567 \cdot 10^{-2}$	$5.0402 \cdot 10^{-2}$
	15	2.676	0.06840	$2.0720 \cdot 10^{-2}$	$-7.4683 \cdot 10^{-2}$	$9.7113 \cdot 10^{-2}$
	17.90	7.381	0.24752	$1.8949 \cdot 10^{-1}$	$-1.7223 \cdot 10^{-1}$	$26.793 \cdot 10^{-2}$
	25	1.290	0.94506	$8.0213 \cdot 10^{-3}$	$6.1751 \cdot 10^{-2}$	$4.6810 \cdot 10^{-2}$
	28.30	0.788	0.96225	$3.3871 \cdot 10^{-3}$	$4.2915 \cdot 10^{-2}$	$2.8604 \cdot 10^{-2}$

3	$2.5 \cdot \pi$	1.074	0.00901	$2.0374 \cdot 10^{-4}$	$-1.8883 \cdot 10^{-3}$	$7.1936 \cdot 10^{-3}$
	10	1.126	0.01203	$2.8511 \cdot 10^{-4}$	$-2.5187 \cdot 10^{-3}$	$7.5434 \cdot 10^{-3}$
	15	1.336	0.02143	$6.0225 \cdot 10^{-4}$	$-4.4729 \cdot 10^{-3}$	$8.9500 \cdot 10^{-3}$
	17.90	1.558	0.02984	$0.9767 \cdot 10^{-3}$	$-6.2011 \cdot 10^{-3}$	$1.0437 \cdot 10^{-2}$
	25	3.251	0.08795	$5.9390 \cdot 10^{-3}$	$-1.7304 \cdot 10^{-2}$	$2.1780 \cdot 10^{-2}$
	28.30	7.381	0.24752	$3.4245 \cdot 10^{-2}$	$-3.1797 \cdot 10^{-2}$	$4.4379 \cdot 10^{-2}$

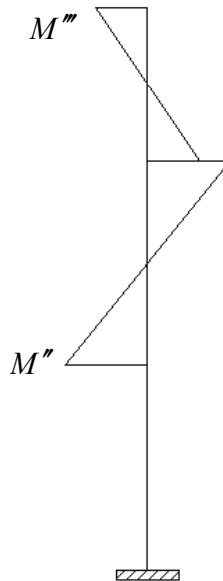
## 8. CALCOLO DELLE AZIONI INTERNE

Nella valutazione della risposta strutturale alle azioni dinamiche riveste ovviamente una grande importanza il calcolo delle azioni interne. Tenendo conto che l'integrazione delle equazioni del moto fornisce la storia temporale degli spostamenti, il modo più semplice di determinare le azioni interne è quello tipico del metodo degli spostamenti. La procedura verrà presentata in dettaglio, per il caso in studio, con riferimento ai momenti agenti sulle colonne di ciascun piano. A tal fine si determinano i diagrammi dei momenti agenti sulle colonne, quando la struttura si atteggia secondo ciascuna delle deformate utilizzate per calcolare la matrice di rigidezza:

$$q_1=1 ; q_2=0 ; q_3=0$$



$$q_1=0 ; q_2=1 ; q_3=0$$



$$q_1=0 ; q_2=0 ; q_3=1$$

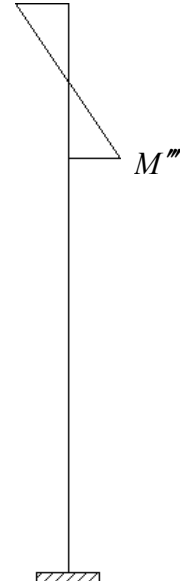


Figura 15 - Distribuzione dei momenti flettenti nella colonna per le situazioni in studio.

I valori agli estremi delle colonne di ciascun piano sono, rispettivamente per il 1°, 2° e 3° piano:

$$M' = 6 \cdot \frac{EJ_1}{h_1^2} = 6 \cdot \frac{205 \cdot 10^6 (KN/m^2) * 1927010^{-8} (m^4)}{(4.00(m))^2} = 14813.81 kNm$$

$$M'' = 6 \cdot \frac{EJ_2}{h_2^2} = 6 \cdot \frac{205 \cdot 10^6 (KN/m^2) * 11260 \cdot 10^{-8} (m^4)}{(3.50(m))^2} = 11305.96 kNm$$

$$M''' = 6 \cdot \frac{EJ_3}{h_3^2} = 6 \cdot \frac{205 \cdot 10^6 (KN/m^2) * 5696 \cdot 10^{-8} (m^4)}{(3.50(m))^2} = 5719.25 kNm$$

Indicando con  $B$ ,  $C$  e  $D$  le sezioni all'estremo superiore delle colonne del 1°, 2° e 3° piano, il valore del momento in queste sezioni, quando la struttura si atteggia secondo la generica deformata, caratterizzata da valori qualunque di  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_3$  può essere trovato facendo uso del principio di sovrapposizione degli effetti:

$$\begin{aligned}
 M_B &= M'q_1 \\
 M_C &= -M''q_1 + M''q_2 = M''(q_2 - q_1) \\
 M_D &= -M'''q_2 + M'''q_3 = M'''(q_3 - q_2)
 \end{aligned}$$

Questo risultato può essere scritto in forma matriciale, come prodotto di una matrice  $\mathbf{S}^T$  opportunamente definita per il vettore  $\mathbf{q}$  delle coordinate libere:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_B \\ M_C \\ M_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M' & 0 & 0 \\ -M'' & M'' & 0 \\ & -M''' & M''' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \mathbf{S}^T \mathbf{q} = \mathbf{S}^T \Phi \mathbf{y} = \boldsymbol{\mu} \mathbf{y}$$

La matrice  $\boldsymbol{\mu}$  dei momenti modali, di quelli cioè che insorgono nella struttura quando è atteggiata secondo una deformata modale, viene ricavata dal prodotto  $\mathbf{S}^T \Phi$  e può essere vista come formata dai tre vettori  $\boldsymbol{\mu}_i$ , che rappresentano il momento sulla struttura associato alla deformata prodotta dall' $i$ -esimo modo:

$$\boldsymbol{\mu} = [\boldsymbol{\mu}_1 \quad \boldsymbol{\mu}_2 \quad \boldsymbol{\mu}_3]$$

Risulta:

$$\boldsymbol{\mu}_1 = \begin{bmatrix} M' \cdot (0.3024) \\ M'' \cdot (-0.3024 + 0.5809) \\ M''' \cdot (-0.5809 + 0.8726) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4479.74 \\ 3148.96 \\ 1668.18 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\mu}_2 = \begin{bmatrix} M' \cdot (-0.5524) \\ M'' \cdot (0.5524 - 0.53934) \\ M''' \cdot (0.53934 + 0.7340) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8182.64 \\ 147.46 \\ 7282.22 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\mu}_3 = \begin{bmatrix} M' \cdot (-0.7768) \\ M'' \cdot (0.7768 + 0.6096) \\ M''' \cdot (-0.6096 - 0.1822) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11507.41 \\ 15675.17 \\ -4528.93 \end{bmatrix}$$

Le azioni interne sono quindi date dal prodotto dei momenti modali e delle coordinate principali:

$$M_B = \mu_{1,1}y_1 + \mu_{2,1}y_2 + \mu_{3,1}y_3$$

$$M_C = \mu_{1,2}y_1 + \mu_{2,2}y_2 + \mu_{3,2}y_3$$

$$M_D = \mu_{1,3}y_1 + \mu_{2,3}y_2 + \mu_{3,3}y_3$$

Nelle successive figure 16-22 sono riportate le storie dei momenti flettenti all'interno del telaio, con le convenzioni indicate nelle figure precedenti, al variare della pulsazione della forzante armonica. Nel calcolo delle azioni interne l'effetto dei modi più alti è più marcato rispetto al caso del calcolo degli spostamenti: il confronto tra le Fig. 16 e 17 evidenzia infatti una diversa distribuzione delle azioni interne nella struttura, laddove il confronto tra le Fig. 8 e 9 metteva in luce solamente un analogo distribuzione di spostamenti, con diverso fattore di scala. La Figura 18 mostra un valore quasi nullo del momento nella sezione C, coerentemente con l'andamento dei momenti modali e con il dato di spostamenti quasi uguali al primo e al secondo piano, mostrato in Fig. 10.

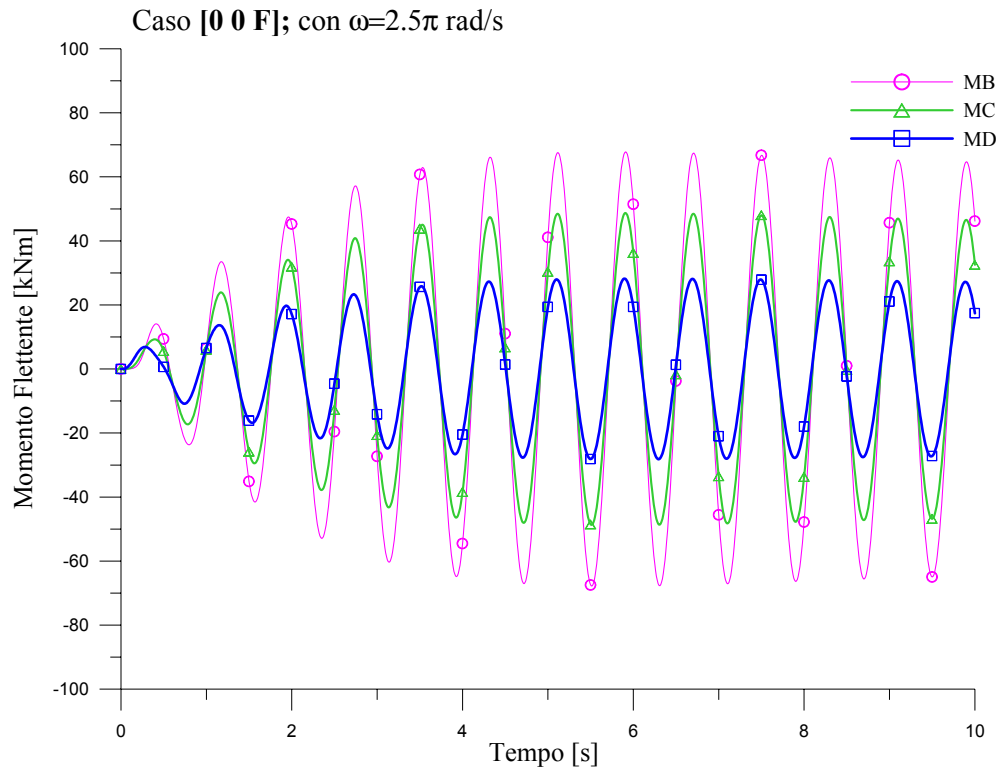


Fig. 16 – Andamento temporale del momento flettente dovuto alla forzante armonica con  $\beta_1=0.95$ .

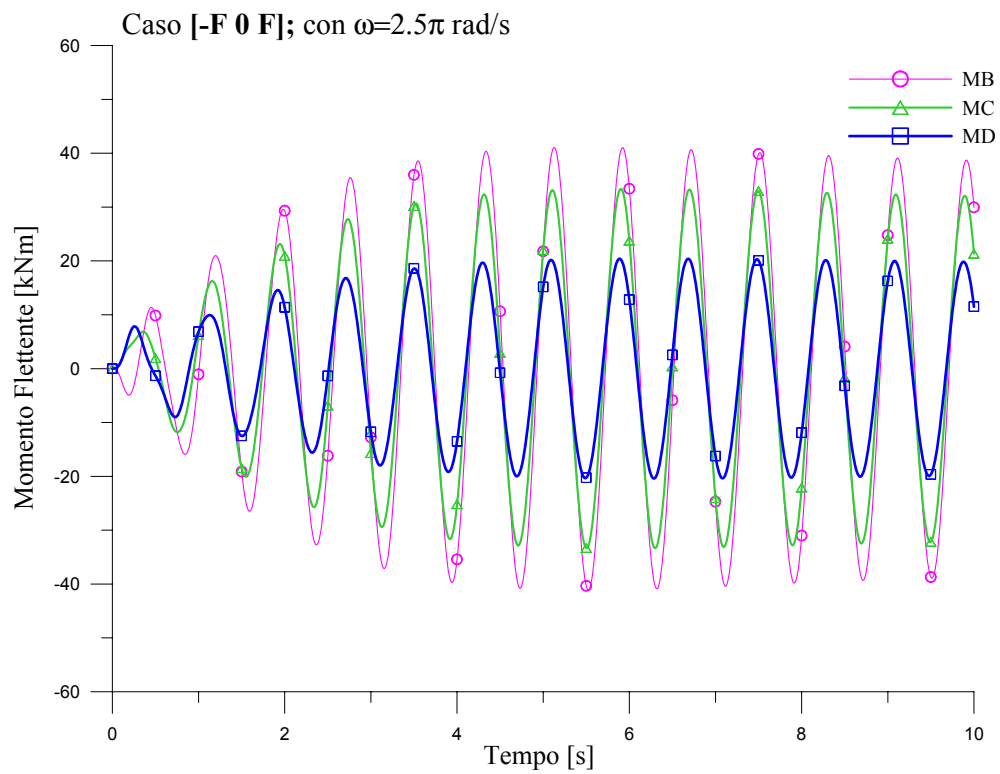


Fig. 17 – Andamento temporale del momento flettente dovuto alla forzante armonica con  $\beta_1=0.95$ .

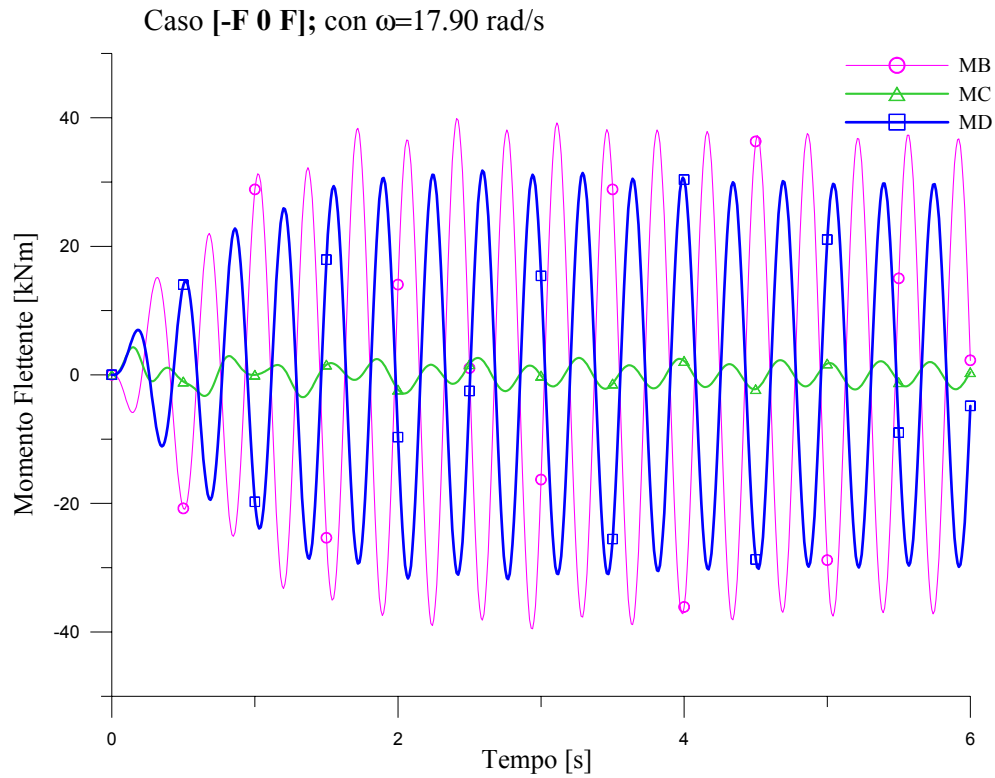


Fig. 18 – Andamento temporale del momento flettente dovuto alla forzante armonica con  $\beta_2=0.95$ .

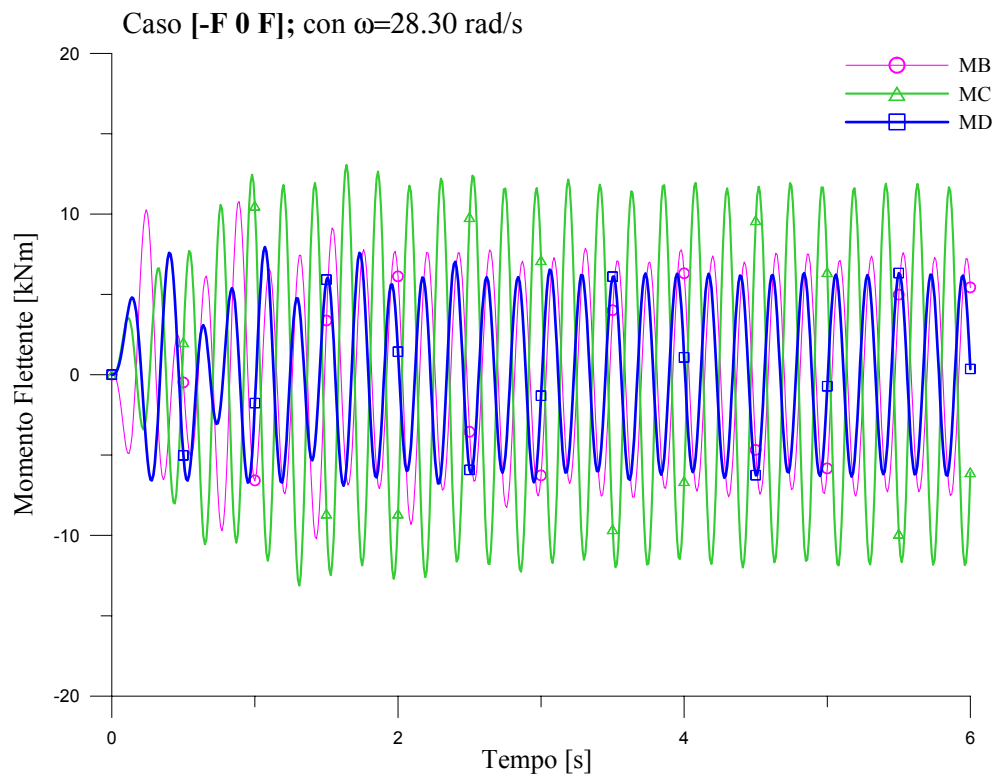


Fig. 19 – Andamento temporale del momento flettente dovuto alla forzante armonica con  $\beta_3=0.95$ .

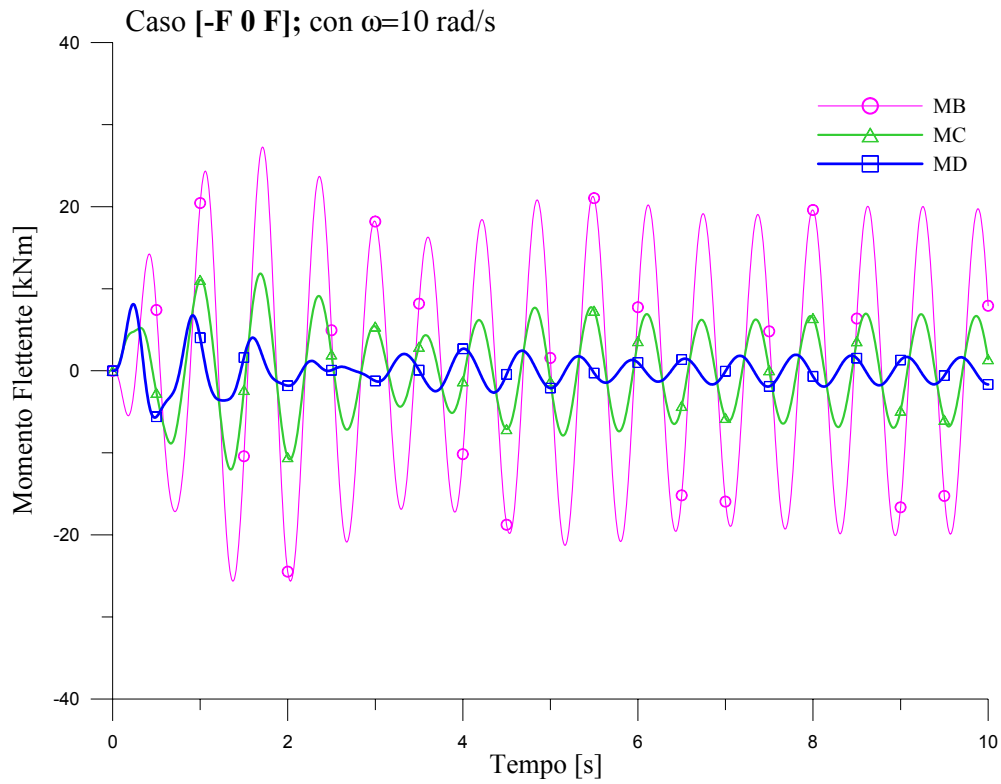


Fig. 20 – Andamento temporale del momento flettente dovuto alla forzante armonica con  $\omega=10$  rad/s.

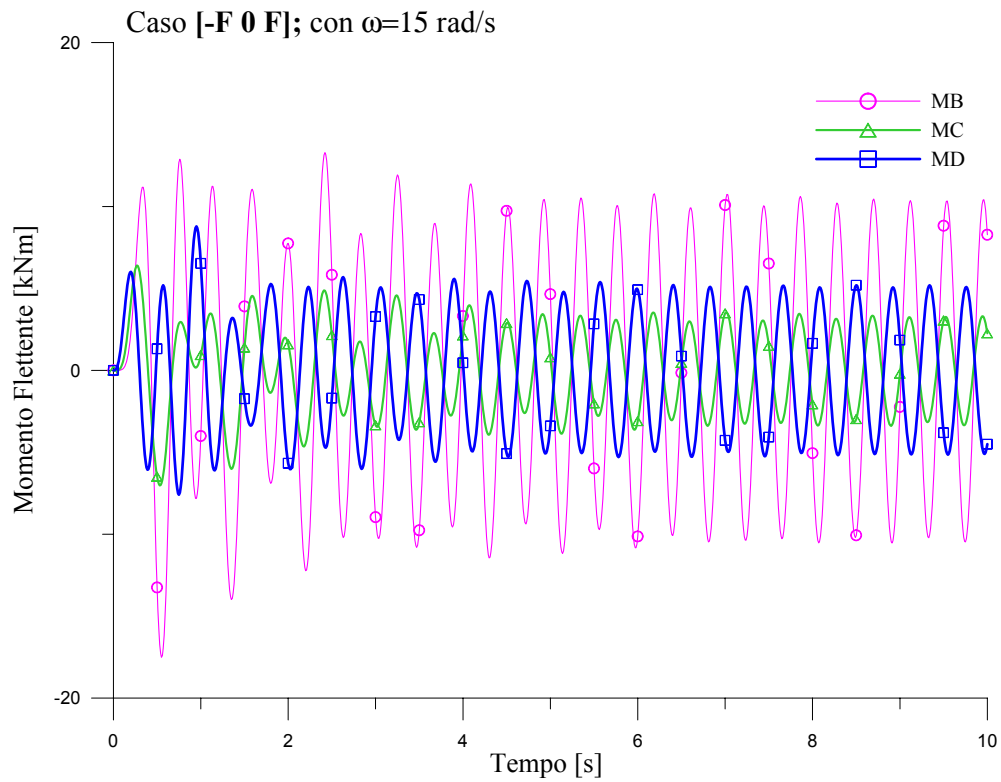


Fig. 21 – Andamento temporale del momento flettente dovuto alla forzante armonica con  $\omega=15$  rad/s.

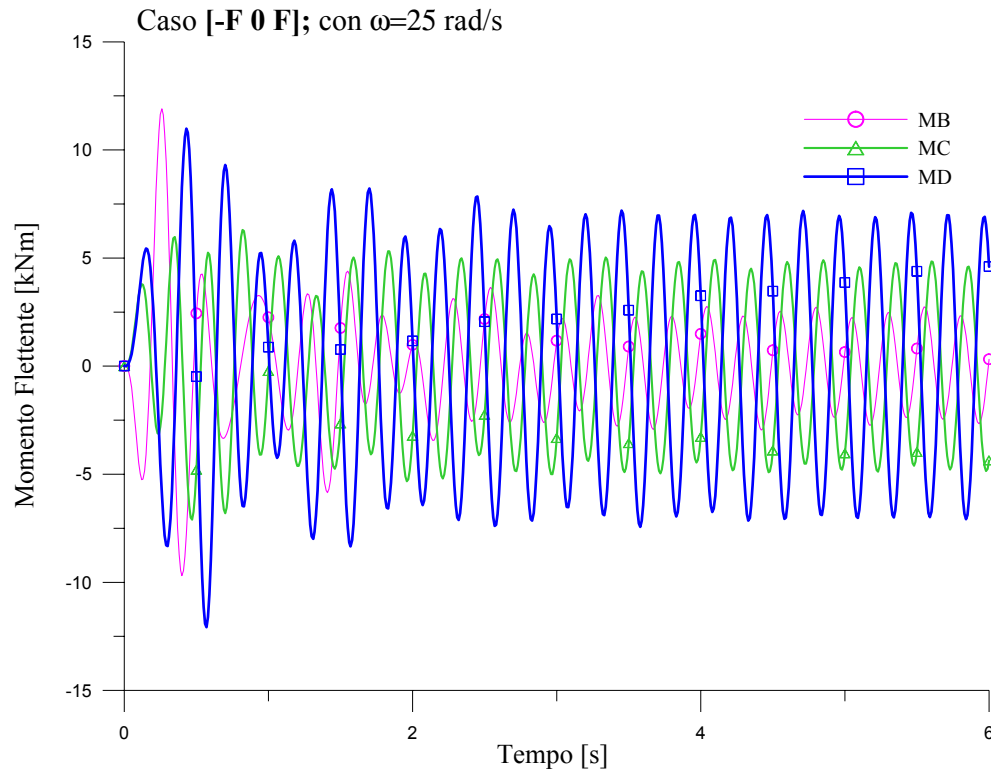


Fig. 22 – Andamento temporale del momento flettente dovuto alla forzante armonica con  $\omega=25$  rad/s.

Nella figura 19 l'andamento dei momenti si discosta fortemente dall'andamento dei momenti modali per il terzo modo, confermando il dato già osservato nella precedente figura 11, che presentava la storia di spostamento. Infine, come già riscontrato nell'analisi degli spostamenti, i massimi valori delle azioni interne si riducono al crescere della pulsazione della forzante, come mostrato dalle figure 20, 21 e 22.

## 9 ANALISI SISMICA DEL TELAIO

L'equazione del moto di un sistema ad  $n$  gradi di libertà in presenza di una forzante generica è:

$$\mathbf{m} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{c} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{k} \mathbf{q} = \mathbf{Q}(t)$$

Il moto della struttura soggetta ad un moto traslatorio impresso alle fondazioni può essere studiato in un riferimento solidale con la fondazione, assumendo quindi come coordinate libere gli spostamenti  $\mathbf{q}$  relativi alle fondazioni stesse, a condizione di imprimere alla struttura come forze perturbatrici le forze apparenti agenti su di essa:

$$\mathbf{Q}(t) = \mathbf{Q}_a(t) = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{r} \cdot \ddot{u}(t)$$

Nell'espressione del vettore  $\mathbf{Q}(t)$ :

- $\mathbf{m}$  rappresenta la matrice delle masse;
- $\mathbf{q}$  è il vettore delle coordinate libere nel sistema di riferimento mobile;
- $\mathbf{r}$  è il vettore dei coefficienti di influenza: nel caso di sistemi composti da aste elastiche e masse concentrate questo vettore è formato da coefficienti unitari in corrispondenza degli spostamenti nella direzione del moto impresso e coefficienti nulli in corrispondenza degli altri gradi di libertà (nel caso di sola traslazione del riferimento);
- $\ddot{u}(t)$  è l'accelerazione del terreno.

Se l'accelerazione del terreno  $\ddot{u}(t)$  è nota le equazioni del moto possono essere integrate con diversi metodi (passo-passo; integrale di Duhamel, etc). Se il moto sismico è invece caratterizzato per mezzo dello spettro di risposta, è possibile un calcolo semplificato della risposta, che conduce ad una valutazione approssimata dei massimi valori assunti dalle grandezze di interesse.

A tal fine, ipotizziamo innanzitutto che il sistema sia disaccoppiabile; l'equazione che regola la  $i$ -esima coordinata principale diventa

$$\ddot{y}_i + 2\nu_i \omega_i \dot{y}_i + \omega_i^2 y_i = -\frac{1}{\boldsymbol{\varphi}_i^T \mathbf{m} \boldsymbol{\varphi}_i} \boldsymbol{\varphi}_i^T \mathbf{m} \cdot \mathbf{r} \cdot \ddot{u}(t)$$

Il secondo membro può essere scritto come:

$$\Gamma_i \ddot{u}(t) = \frac{\boldsymbol{\varphi}_i^T \mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{\boldsymbol{\varphi}_i^T \mathbf{m} \boldsymbol{\varphi}_i} \ddot{u}(t) \quad \text{introducendo il fattore di partecipazione modale} \quad \Gamma_i = \frac{\boldsymbol{\varphi}_i^T \mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{\boldsymbol{\varphi}_i^T \mathbf{m} \boldsymbol{\varphi}_i}$$

Nel caso in studio risulta:

$$\mathbf{r}^T = [1 \quad 1 \quad 1] \quad \text{per cui} \quad \mathbf{m} \cdot \mathbf{r} = m_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0.75 \end{bmatrix}$$

## 9.1 CALCOLO DEI FATTORI DI PARTECIPAZIONE MODALE

- Fattore di partecipazione modale del primo modo

$$\boldsymbol{\varphi}_1^T \mathbf{m} \cdot \mathbf{r} = m_1 \cdot (0.3024 \cdot 1 + 0.5809 \cdot 1 + 0.8726 \cdot 0.75) = 1.5378 \cdot m_1$$

$$\Gamma_1 = \frac{\boldsymbol{\varphi}_1^T \mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{\boldsymbol{\varphi}_1^T \mathbf{m} \boldsymbol{\varphi}_1} = \frac{1.5378 \cdot m_1}{m_1} = 1.5378$$

- Fattore di partecipazione modale del secondo modo

$$\boldsymbol{\varphi}_2^T \mathbf{m} \cdot \mathbf{r} = m_1 \cdot (-0.5523 \cdot 1 - 0.5393 \cdot 1 + 0.7339 \cdot 0.75) = -0.5412 \cdot m_1$$

$$\Gamma_2 = \frac{\boldsymbol{\varphi}_2^T \mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{\boldsymbol{\varphi}_2^T \mathbf{m} \boldsymbol{\varphi}_2} = \frac{-0.5412 \cdot m_1}{m_1} = -0.5412$$

- Fattore di partecipazione modale del terzo modo

$$\boldsymbol{\varphi}_3^T \mathbf{m} \cdot \mathbf{r} = m_1 \cdot (-0.7768 \cdot 1 + 0.6096 \cdot 1 - 0.1822 \cdot 0.75) = -0.3038 \cdot m_1$$

$$\Gamma_3 = \frac{\boldsymbol{\varphi}_3^T \mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{\boldsymbol{\varphi}_3^T \mathbf{m} \boldsymbol{\varphi}_3} = \frac{-0.3038 \cdot m_1}{m_1} = -0.3038$$

## 9.2 ANALISI SPETTRALE

In base alla definizione di spettro di risposta, il massimo valore assoluto assunto dalla  $i$ -esima coordinata principale vale:

$$\max |y_i(t)| = |\Gamma_i| \cdot S_d(T_i, \nu_i)$$

I valori delle ordinate dello spettro  $S_d(T_i, \nu_i)$  nei punti corrispondenti ai periodi propri vengono ricavati dal grafico riportato nella successiva figura 23.

- Primo modo  $S_v(T_1, \nu) = 85 \text{ in/s} = 85 \cdot \frac{2.54}{100} \text{ m/s} = 2.16 \text{ m/s}$

$$S_d = \frac{S_v}{\omega_1} = \frac{2.16}{8.2629} = 0.261 \text{ m}$$

- Secondo modo  $S_v(T_2, \nu) = 65 \text{ in/s} = 65 \cdot \frac{2.54}{100} \text{ m/s} = 1.65 \text{ m/s}$

$$S_d = \frac{S_v}{\omega_2} = \frac{1.65}{18.844} = 0.0875 \text{ m}$$

- Terzo modo  $S_v(T_3, \nu) = 35 \text{ in/s} = 35 \cdot \frac{2.54}{100} \text{ m/s} = 0.9 \text{ m/s}$

$$S_d = \frac{S_v}{\omega_3} = \frac{0.9}{29.794} = 0.0302 \text{ m}$$

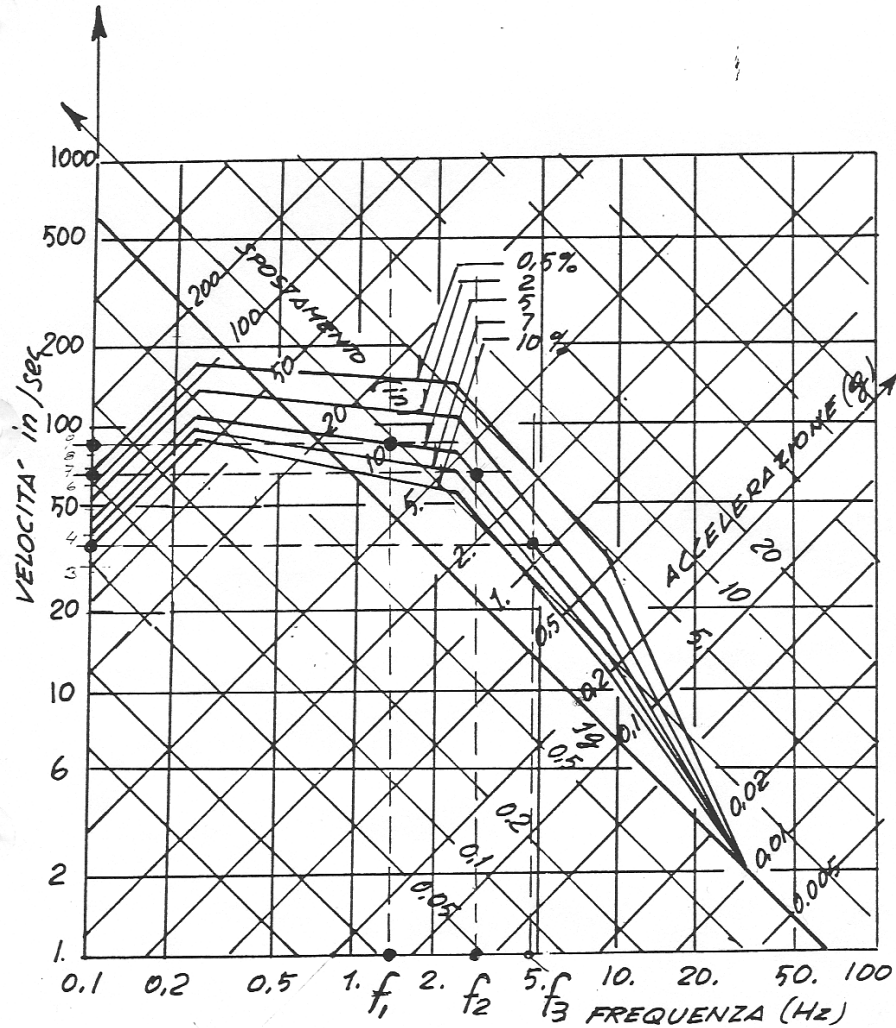


Figura 23 - Spettro di risposta di progetto per le componenti orizzontali con accelerazione orizzontale del suolo pari ad 1g (secondo la Regulatory Guide 1.60 della U.S. Atomic Energy Commission).

Come mostrato in figura, lo spettro utilizzato è normalizzato per un'accelerazione di picco pari a 1g; nell'ipotesi che l'accelerazione di picco della zona in cui è situato l'edificio sia  $a_0=0.25g$ , le ordinate dello spettro vanno moltiplicate per 0.25.

Si esprime ora la generica coordinata libera del sistema come sovrapposizione dei contributi modali:

$$q_j(t) = \sum_i \phi_{i,j} y_i(t) = \sum_i q_j^{(i)}(t)$$

Il massimo valore assoluto del contributo modale è pertanto dato da:

$$\max |q_j^{(i)}(t)| = |\phi_{i,j} \cdot \Gamma_i| \cdot S_d(T_i, \nu_i) \cdot a_0$$

Il massimo valore assoluto delle  $q_j(t)$  non è determinabile direttamente, perché non si conosce né l'istante  $\bar{t}$  in cui il massimo ha luogo, né il valore delle coordinate libere in tale istante. Un limite superiore di tale valore può essere dato da:

$$\max|q_j(t)| = \sum_i \max|q_j^{(i)}(t)|$$

Il valore atteso, se non ci sono dei modi aventi frequenze proprie molto vicine, può essere determinato facendo uso della regola *SRSS* (*square root of the sum of the squares*), come la radice quadrata della somma dei quadrati dei contributi modali:

$$\max|q_j(t)| = \left\{ \sum_i [\max|q_j^{(i)}(t)|]^2 \right\}^{1/2}$$

- Spostamenti massimi in corrispondenza del primo modo di vibrare

$$\max|q^{(1)}(t)| = |\boldsymbol{\varphi}_1 \cdot \Gamma_1| \cdot S_d(T_1, \nu_1) \cdot a_0 = |\boldsymbol{\varphi}_1| \cdot 1.53778115 \cdot 0.216 \cdot 0.25 = \begin{bmatrix} 0.03034 \\ 0.05829 \\ 0.08755 \end{bmatrix} (m) = \begin{bmatrix} 3.034 \\ 5.829 \\ 8.755 \end{bmatrix} (cm)$$

- Spostamenti massimi in corrispondenza del secondo modo di vibrare:

$$\max|q^{(2)}(t)| = |\boldsymbol{\varphi}_2 \cdot \Gamma_2| \cdot S_d(T_2, \nu_2) \cdot a_0 = |\boldsymbol{\varphi}_2| \cdot 0.5412194 \cdot 0.0875 \cdot 0.25 = \begin{bmatrix} 0.6539 \\ 0.6385 \\ 0.8689 \end{bmatrix} (cm)$$

- Spostamenti massimi in corrispondenza del terzo modo di vibrare:

$$\max|q^{(3)}(t)| = |\boldsymbol{\varphi}_3 \cdot \Gamma_3| \cdot S_d(T_3, \nu) \cdot a_0 = |\boldsymbol{\varphi}_3| \cdot 0.3038223 \cdot 0.0302 \cdot 0.25 = \begin{bmatrix} 0.1782 \\ 0.1398 \\ 0.0418 \end{bmatrix} (cm)$$

Il valore massimo atteso si ottiene combinando i contributi dei vari modi:

$$\max|q_1(t)| = \sqrt{(3.034)^2 + (0.6539)^2 + (0.1782)^2} = 3.109cm$$

$$\max|q_2(t)| = \sqrt{(5.829)^2 + (0.6385)^2 + (0.1398)^2} = 5.865cm$$

$$\max|q_3(t)| = \sqrt{(8.755)^2 + (0.8689)^2 + (0.0418)^2} = 8.798cm$$

Per il calcolo delle azioni interne si ha, indicando con  $S$  la generica azione interna:

$$S(t) = \sum_{i=1}^n \mathbf{s}^T \boldsymbol{\varphi}_i \cdot y_i(t) = \sum_i S_i y_i = \sum_i S^{(i)}(t)$$

da cui si ricava:

$$\max|S^{(i)}(t)| = |S_i| \max|y_i(t)| = |S_i \cdot \Gamma_i| \cdot S_d(T_i, \nu_i)$$

e analogamente a quanto fatto nel calcolo degli spostamenti, si ottiene:

$$\max|S(t)| = \left\{ \sum_i [\max|S^{(i)}(t)|]^2 \right\}^{1/2}$$

Nel caso in studio i momenti flettenti nella struttura si valutano a partire dalla relazione:

$$\mathbf{M} = \boldsymbol{\mu} \mathbf{y}$$

nella quale  $\boldsymbol{\mu}$  è una matrice le cui righe sono i vettori  $\boldsymbol{S}$  ( $S_i$   $i=1,..,n$ ) definiti per i momenti flettenti (valore massimo della distribuzione) nei pilastri di ciascun piano.

Indicando con  $\boldsymbol{\mu}^{(i)}$  la  $i$ -esima colonna di tale matrice, il massimo valore assoluto del contributo modale è pertanto dato da

$$\max|\mathbf{M}^{(i)}| = |\boldsymbol{\mu}^{(i)}| \cdot \max|\mathbf{y}_i| = |\boldsymbol{\mu}^{(i)} \cdot \Gamma_i| \cdot S_d(T_i, \nu_i) \cdot a_0$$

I contributi di ciascun modo, il cui diagramma è riportato nella successiva figura 24, vengono calcolati come segue:

- Primo modo

$$\max|\mathbf{M}^{(1)}| = \begin{bmatrix} 4479.74 \\ 3148.96 \\ 1668.18 \end{bmatrix} \cdot 1.5378 \cdot 0.261 \cdot 0.25 = \begin{bmatrix} 449.49 \\ 315.96 \\ 167.38 \end{bmatrix} (kNm)$$

- Secondo modo

$$\max|\mathbf{M}^{(2)}| = \begin{bmatrix} 8182.64 \\ 147.46 \\ 7282.22 \end{bmatrix} \cdot (0.5412) \cdot 0.0875 \cdot 0.25 = \begin{bmatrix} 96.87 \\ 1.74 \\ 86.21 \end{bmatrix} (kNm)$$

- Terzo modo

$$\max|\mathbf{M}^{(3)}| = \begin{bmatrix} 11507.41 \\ 15675.17 \\ 4528.93 \end{bmatrix} \cdot (0.3038) \cdot 0.0302 \cdot 0.25 = \begin{bmatrix} 26.40 \\ 35.96 \\ 10.39 \end{bmatrix} (kNm)$$

I massimi valori attesi per ciascuna sezione si ottengono, combinando secondo la regola *SRSS*, i massimi valori assoluti dei contributi modali

$$\max|M_B| = \sqrt{(449.49)^2 + (96.87)^2 + (26.40)^2} = 460.57 kNm$$

$$\max|M_C| = \sqrt{(315.96)^2 + (1.74)^2 + (35.96)^2} = 318.00 kNm$$

$$\max|M_D| = \sqrt{(167.38)^2 + (86.21)^2 + (10.39)^2} = 188.56 kNm$$

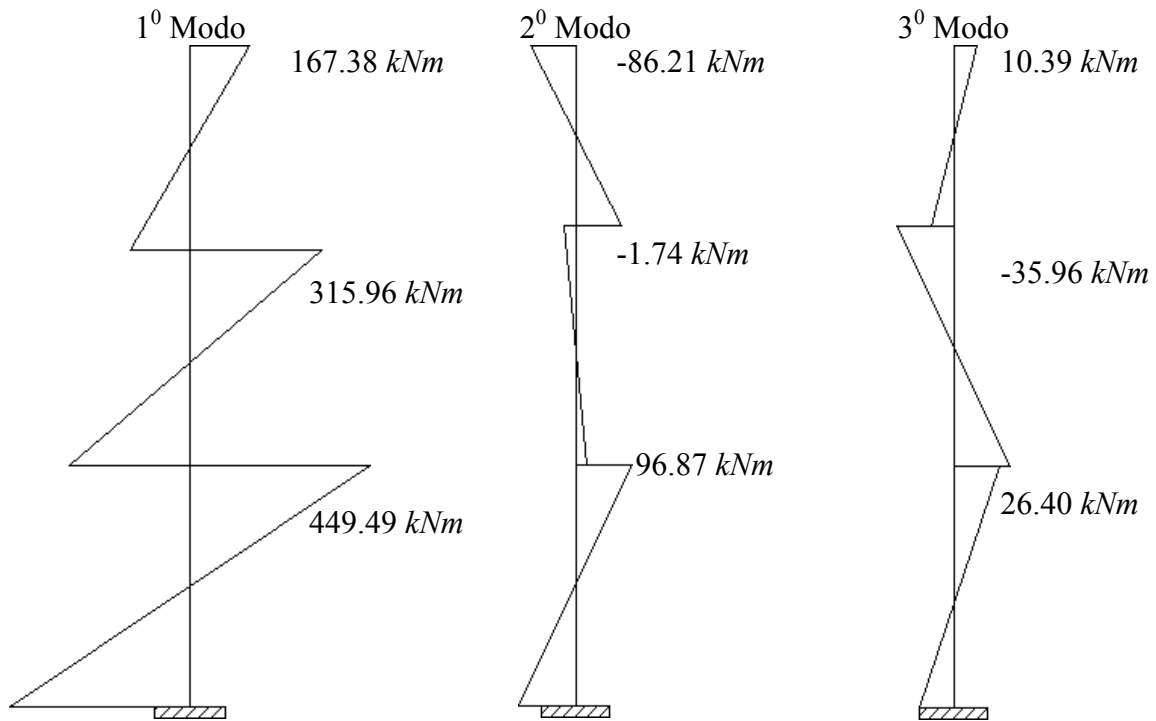


Figura 24 - Massimi valori dei contributi modali del momento flettente nel caso sismico.